Majorations *à la Weyl* pour le nombre de résonances associées à une perturbation compacte du laplacien euclidien

Laurent Guillopé

Vodev [18, 19, 20, 21] a prouvé des majorations optimales pour la fonction de comptage des résonances associées à certaines perturbations compactes du laplacien euclidien. Ses travaux reprennent la méthode du déterminant introduite par Melrose [9] pour ce comptage, qui a été utilisée pour le même type de problèmes par Intissar [7] (majorations en dimension paire) et Zworski [23] (majorations optimales pour des opérateurs de Schrödinger avec potentiel à support compact en dimension impaire) ; l'auteur et Zworski [5, 6] ont établi par une étude similaire des résultats dans la même veine pour certaines variétés hyperboliques à l'infini. Une autre approche, plus microlocale, par Sjöstrand et Zworski [12] aborde avec grand succès ces problèmes de comptage, avec une analyse précisée au voisinage du spectre continu (développée dans des travaux ultérieurs tels [13], [14] et [15]). Enfin, la méthode du déterminant ne peut donner pour la fonction de comptage ni des minorations non triviales (telles celles de [16, 17]), ni un asymptotique (tels ceux de [24, 25] pour les potentiels radiaux, de [22] pour des perturbations hypoelliptiques et [10, 11] pour des surfaces d'aire finie à pointes hyperboliques) ; cependant la nature optimale des majorations présentées ici est confortée par ces asymptotiques [24, 25, 10] ou les presque asymptotiques des perturbations hypoelliptiques de [17].

Cette note est consacrée à la preuve des majorations décrites dans le théorème suivant :

Thorme *Soit H une perturbation admissible du laplacien de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$ telle que décrite par la définition 1 et $\mathcal{R}_H$ son ensemble résonnant tel que précisé dans la définition 2. Il existe alors une constante C_H telle que*

$$\begin{cases} \#\{z \in \mathcal{R}_H, |z| \leq r\} \leq C_H \varphi_H(C_H\langle r\rangle)\,, & \text{si } n \text{ est impair}\,, \\ \#\{z \in \mathcal{R}_H, |\operatorname{Arg} z| \leq a, |z| \leq r\} \leq C_H\langle a\rangle[\log^n\langle a\rangle + \varphi_H(C_H\langle r\rangle)]\,, & \text{sinon}\,, \end{cases}$$

où φ_H est l'inverse de la fonction f_H introduite dans la condition (iii) de la définition 1.

Les situations modélisées comme perturbations admissibles sont variées, comme l'illustre la figure 1 : le cas (a), en dimension impaire, donne une majoration polynomiale de degré n, de même ordre que l'asymptotique de Weyl pour le laplacien sur une variété compacte ; le cas (b) donne, en dimension 2, une majoration quadratique, là où l'asymptotique de Weyl perdure comme l'a énoncé Müller [10] (*cf.* [11, 22]).

Tout lecteur de Melrose, Vodev et Zworski y notera la filiation évidente avec leurs travaux ; outre certaines simplifications, cet exposé prétend exhiber une démarche où les dimensions paires et impaires sont quelque peu réconciliées.

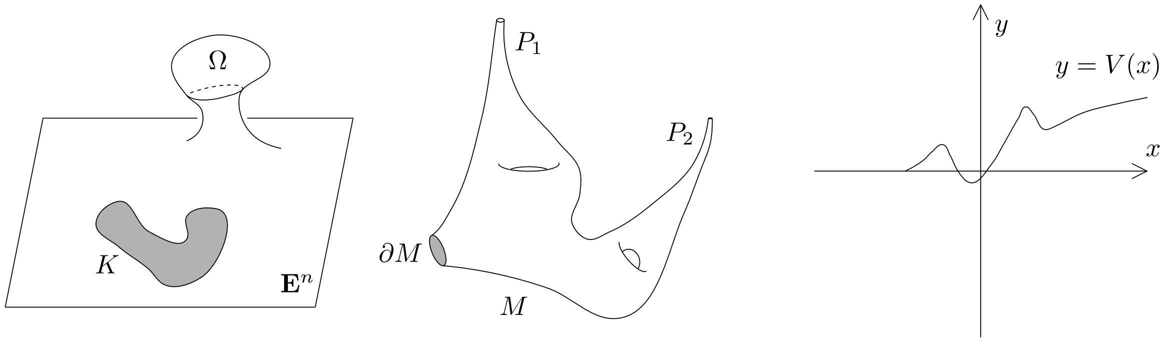
Les perturbations admissibles et leurs résonances

Soit $\mathbf{E}^n$ l'espace euclidien de dimension n et Δ_n le laplacien associé sur $L^2(\mathbf{E}^n)$. Si $H_k^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel de première espèce (*cf.* [1]), la résolvante $R_{\Delta_n}(\lambda) = (\Delta_n - \lambda)^{-1}, \lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ a pour noyau

$$R_{\Delta_n}(\lambda)(x,y) = \frac{i}{4}(\sqrt{2\pi}|x-y|)^{2-n} \left[u^{(n-2)/2} H^{(1)}_{(n-2)/2}(u)\right]_{|u=\sqrt{\lambda}|x-y|} \tag{1}$$

où la racine carrée $\sqrt{\lambda}$ est de partie imaginaire positive. Comme fonction à valeurs opérateur de $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbf{E}^n)$ dans $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^n)$, la résolvante R_{Δ_n} définie sur $\mathbf{F}_0$ admet un prolongement méromorphe (holomorphe si $n > 1$)

L'auteur remercie G. Vodev et M. Zworski de leurs critiques vigilantes qui ont accompagné la rédaction de ce texte.



(a) (b) (c)

Figure 1 : Quelques perturbations admissibles : (a) $\Delta_{\mathbf{E}^n \setminus K}$ avec conditions de Dirichlet sur ∂K et métrique non euclidienne au voisinage de Ω, (b) Δ_M avec M variété riemannienne à bord ∂M et à pointes P_1, P_2 de courbure -1, (c) $\Delta_1 + V$ avec potentiel V croissant lentement en $+\infty$ et nul au voisinage de $-\infty$ de telle sorte que la résolvante tronquée soit en dehors de toute classe de Schatten.

à la courbe spectrale Σ_n définie suivant la parité de n : si n est impair, Σ_n est égal à $\mathbf{C}$, revêtement ramifié de $\mathbf{C}$ de degré 2 avec application de revêtement $\pi_n : z \in \mathbf{C} \to \lambda = z^2$; si n est pair, Σ_n est la surface de Riemann du logarithme complexe $\mathbf{\Lambda} = \{\sigma = (\zeta, z) \in \mathbf{C}^2, z = e^\zeta\}$ avec projection $\pi_n(\sigma) = z^2$ sur $\mathbf{C}^*$ (les fonctions *log* et *Arg* y sont définies par $\log \sigma = \zeta, \operatorname{Arg} \sigma = \Im m \zeta$). L'un des feuillets du revêtement Σ_n, noté $\mathbf{F}_0$ (dit physique dans une terminologie héritée de la mécanique quantique et de ses hamiltoniens) est identifié au demi-plan $\{\Im m z > 0\}$, avec intérieur étale sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$. Respectant un abus usuel, Σ_n sera paramétré avec la variable z : $R_{\Delta_n}(z), z \in \mathbf{F}_0$ est identifié avec la résolvante $R_{\Delta_n}(\lambda)_{|\lambda = \pi_n(z)}$.

Le théorème s'applique à tout hamiltonien H qui soit une perturbation compacte du laplacien euclidien, localisée dans la boule $B(O, \rho_0) = \{x \in \mathbf{E}^n, |x| < \rho_0\}$, comme le précise la définition :

Définition 1 *L'opérateur auto-adjoint H, de domaine $\mathcal{D}(H)$, sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une perturbation compacte admissible du laplacien euclidien Δ_n si :*

(i) l'espace $\mathcal{H}$ admet la décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus L^2(\mathbf{E}^n \setminus B(O, \rho_0))$;

(ii) H opère localement comme le laplacien euclidien Δ_n vis à vis de la décomposition précédente : pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{E}^n)$ valant 1 sur $B(O, \rho_0)$ et tout $u \in \mathcal{D}(H)$, l'élément $(1 - \chi)u$ (naturellement défini) est dans le domaine $\mathcal{D}(H)$ avec $H(1 - \chi)u = \Delta_n(1 - \chi)u$; si $\widetilde{\chi}$ est un autre élément de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{E}^n)$ analogue à χ avec $\widetilde{\chi}(1 - \chi) = 0$, $(1 - \chi)H\widetilde{\chi}u = 0$.

(iii) pour $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{E}^n)$ valant 1 sur la boule $B(O, \rho_0)$, la résolvante tronquée $\chi(H + i)^{-1}$ est compacte, avec suite des valeurs singulières vérifiant

$$\sup_{j \geq 1} \mu_j(\chi(H + i)^{-1}) f_H(j)^2 < \infty \,,$$

où f_H est une fonction strictement croissante définie sur $[1, \infty)$ telle que, pour $t, \tau \geq 1$, $0 < f_H(t) \leq t^{1/n}$, $f_H(\tau t) \leq C\tau^\delta f_H(t)$. Le réel ν_H est défini comme $\nu_H = 2$ si $\delta < 1/2$, $\nu_H = \delta$ si $\delta > 1/2$ et un réel quelconque de l'intervalle $(0, 1)$ si $\delta = 1/2$.

Remarque 1 Pour une perturbation elliptique, telle $H = (\Delta_n + q, H^2(\mathbf{R}^n \setminus K))$ avec q potentiel à support compact et K compact, sera choisie $f_H(t) = t^{1/n}$; pour certaine des perturbations hypoelliptiques du paragraphe liminaire, ce sera $f_H(t)$ d'inverse $\varphi_H(\lambda) = \lambda^n \log \lambda$ ou $\varphi_H(\lambda) = \lambda^p$ avec $n \leq p \leq 2n$.

Le prolongement méromorphe de la résolvante est donné par la proposition suivante, où $\mathcal{H}_{\text{comp}}$ et $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ sont définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{comp}} &= \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus L^2_{\text{comp}}(\mathbf{E}^n \setminus B(O, \rho_0)) \,, \\ \mathcal{H}^2_{\text{loc}} &= \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus H^2_{\text{loc}}(\mathbf{E}^n \setminus B(O, \rho_0)) \,. \end{aligned}$$

Proposition *Soit H une perturbation admissible du laplacien de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$ telle que décrite par la définition 1 et R_H sa fonction résolvante à valeurs opérateur borné dans $\mathcal{H}$ définie sur $\mathbf{F}_0$ par $R_H(\lambda) = (H-\lambda)^{-1}$. La fonction induite (et notée pareillement) R_H sur $\mathbf{F}_0$ à valeurs opérateur de $\mathcal{H}_{\mathrm{comp}}$ dans $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}$ admet un prolongement méromorphe à la courbe spectrale Σ_n.*

Preuve : Soient χ_1, χ_2, χ_3 des fonctions lisses à support compact dans la boule $B(0, \rho_0+1)$, valant 1 sur la boule $B(0, \rho_0)$ et telles que $\chi_{i+1}\chi_i = \chi_i, i = 1, 2$. Soit z_0 dans $\mathbf{F}_0$ avec z_0^2 hors du spectre de H. Pour z dans $\mathbf{F}_0$, une paramétrice de la résolvante $R_H(z)$ est donnée par

$$P(z_0, z) = \chi_3 R_H(z_0)\chi_2 + (1-\chi_1)R_{\Delta_n}(z)(1-\chi_2)$$

puisque $(H - z^2)P(z_0, z) = 1 + K(z_0, z)$ avec

$$K(z_0, z) = [\Delta_n, \chi_3]R_H(z_0)\chi_2 + (z_0^2 - z^2)\chi_3 R_H(z_0)\chi_2 - [\Delta_n, \chi_1]R_{\Delta_n}(z)(1-\chi_2)$$

compact.

Vu que $K(z_0, z_0)$ tend vers 0 lorsque $z_0 \to +i\infty, z_0 \in i\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{F}_0$, la théorie de Fredholm s'applique à $K(z_0, z_0)$ pour un z_0 convenable et le prolongement de la fonction résolvante localisée $R_H\chi_\rho, \rho \geq \rho_0 + 1$ définie sur $\mathbf{F}_0$ et à valeurs opérateur borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{comp}}$ est donné sur Σ_n par

$$R_H(z)\chi_\rho = P(z_0, z)\chi_\rho(1 + K(z_0, z)\chi_\rho)^{-1} \tag{2}$$

où χ_ρ est une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{E}^n)$ constante égale à 1 sur la boule $B(O, \rho)$. □

Remarque 2 Que l'opérateur H soit auto-adjoint assure que la fonction résolvante R_H est définie en au moins un point de $\mathbf{C}$: avec seulement cette dernière hypothèse vérifiée, la proposition de prolongement méromorphe ci-dessus ainsi que le théorème restent valides.

L'ensemble résonnant $\mathcal{R}_H$ de H rassemble les résonances de H comptées avec multiplicité, dont la définition suivante est corroborée par la théorie de Lax-Phillips [8] (suivant leur interprétation des résonances comme pôles de la matrice de diffusion) :

Définition 2 *Une résonance est un pôle de la résolvante R_H sur Σ_n, sa multiplicité est le rang du résidu $\operatorname{res}_{\lambda_0} R_H = \int_{\gamma_{\lambda_0}} R_H(\lambda)d\lambda$ où γ_{λ_0} est un lacet suffisamment petit d'indice 1 sur Σ_n entourant λ_0.*

Remarque 3 Avec le paramètre uniformisant z ($\lambda = z^2$), le résidu $\operatorname{res}_{\lambda_0} R_H$ est égal à l'intégrale $\int_{\gamma_{z_0}} R_H(z)zdz$ où γ_{z_0} est un lacet suffisamment petit d'indice 1 entourant z_0.

Remarque 4 L'image du résidu $\operatorname{res}_{\lambda_0} R_H$ est égale à celle de $\operatorname{res}_{\lambda_0}(R_H\chi)$ pour tout χ à support compact et égal à 1 au voisinage de $\overline{B}_{\rho_0+1}$. En effet, si χ' est une fonction du même type et θ une fonction lisse nulle sur B_{ρ_0} et constante égale à 1 en dehors de B_{ρ_0+1}, alors

$$R_H\left(\chi\{1 + [\Delta, \theta]R_{\Delta_n}\}\right) = R_H\chi' + \theta R_{\Delta_n}(\chi - \chi')$$

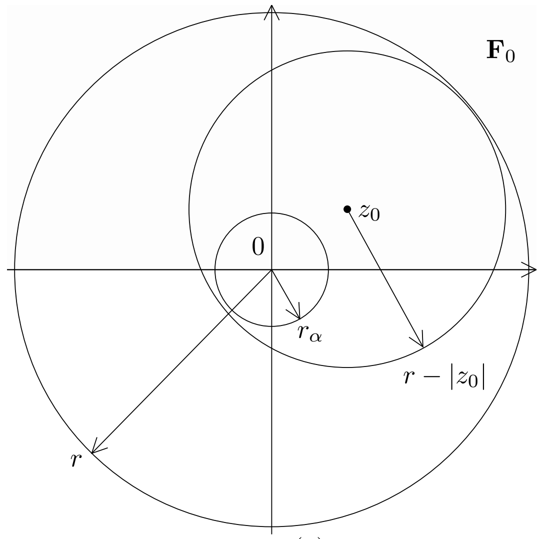
et l'holomorphie du dernier terme du membre de droite induit l'indépendance relativement à χ de l'image du résidu $\operatorname{res}_{\lambda_0}(R_H\chi)$.

Pour la suite, $z_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ et χ_{ρ_0+1} sont choisis une fois pour toute et ne seront pas mentionnés pour les opérateurs dont la définition en dépend. La preuve du théorème se développe, via une succession de lemmes, selon le schème suivant :

Preuve du thorme (abrg) : Les résonances de H dans le disque $D_n(0, r) = \{z \in \Sigma_n, |z| \leq r\}$ sont, avec multiplicité, dans l'ensemble des zéros de la fonction D_r définie sur $D_n(0, r)$ par le déterminant

$$D_r(z) = \det(1 - L_r^N(z)), \tag{3}$$

pour une fonction L_r à valeurs opérateur traçable à partir du reste $K(z, z_0)$ de (2) et un entier N convenable. Á l'instar de Jensen ou Carleman (*cf.* figure 2), le dénombrement de ces zéros passe par une estimation, de type exponentiel, de la croissance du déterminant D_r. Le lemme 2 sur les déterminants d'opérateurs dans les classes de Schatten permet de remplacer le déterminant (3) par un produit (12) de trois facteurs dont



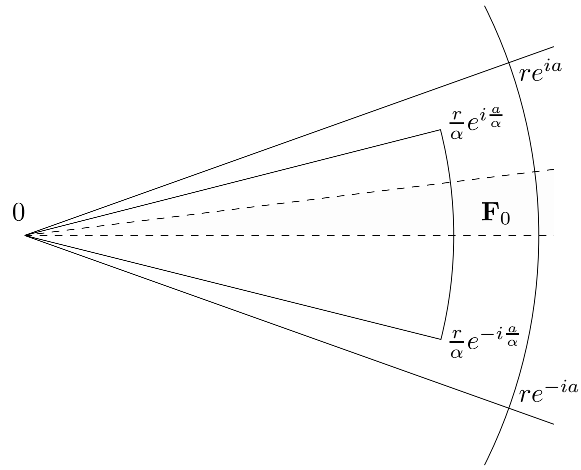


Figure 2 : D_r défini dans $D_n(0,r)$: (a) formule de Jensen appliquée dans $D(z_0, r-|z_0|)$ et estimation du nombre de résonances dans $D(0,r_\alpha), r_\alpha = (r-|z_0|)/\alpha - |z_0|$, (b) formule de Carleman (renormalisée) appliquée dans $D_n(0,r) \cap \{|\operatorname{Arg} z| \leq a\}$ pour compter les zéros dans $D_n(0,r/\alpha) \cap \{|\operatorname{Arg} z| \leq a/\alpha\}$

chacun a sa croissance estimée: le premier facteur est aisément borné sur $D_n(0,r)$ (uniformément en r), le second a sa croissance gouvernée (lemme 3) par celle de la fonction f_H de la propriété *(iii)* de la définition 1. Quant au troisième, il est tout d'abord estimé sur le feuillet $\mathbf{F}_0$, qualifié parfois de *bon* demi-plan (lemme 4) ; pour les feuillets non physiques de la courbe spectrale Σ_n (un seul feuillet $\mathbf{F}_{-1}$, le demi-plan $\Im m z \leq 0$, qualifié de *mauvais*, si n est impair ; une infinité, $\mathbf{F}_m, m \in \mathbf{Z}^*$, paramétrée par $m = [\operatorname{Arg}(\sigma)/\pi] \in \mathbf{Z}$, si n est pair), la formule de Green (17) ramène au *bon* demi-plan et à une estimation d'un déterminant avec la matrice de diffusion du problème libre de l'hamiltonien Δ_n (lemme 6).

Ainsi, en dimension impaire, la formule de Jensen, invoquée avec les majorations du lemme 7 (qui énonce que, pour une perturbation elliptique, le déterminant D_r, indépendant de r, est une fonction entière d'ordre n et de type fini), suffit à convaincre de la partie impaire du théorème. En dimension paire, l'étude de la singularité en $z=0$ du lemme 8 permet mêmement d'appliquer la formule de Carleman (à une fonction convenable) pour conclure. □

Par $\langle z \rangle$ sera désignée, pour z complexe, la quantité $1+|z|$. La lettre C désignera une constante, variable au gré des assertions, qui ne verra généralement ni sa valeur estimée ni sa dépendance par rapport aux autres paramètres précisées. Le terme *résolvante* désignera diverses entités : en général, le contexte suffira à distinguer un opérateur ou une fonction à valeurs opérateur, et leurs différents domaines (domaine du paramètre spectral de la fonction, domaine de l'opérateur ainsi que l'espace contenant son image).

Le choix de L_r

Le lemme suivant (*cf.* l'appendice de [21]) ne peut être appliqué directement à l'écriture (2), où la paramétrice $P(z_0, z)$ est holomorphe sur $\Sigma_n \setminus \{0\}$, car $K(z_0,z)\chi_\rho$ n'est pas traçable en général.

Lemme 1 *Soit* Ω *un voisinage complexe connexe de* 0, U_1, U_2 *et* T *deux fonctions à valeurs opérateur sur* Ω. *Si* $1+T(z_0)$ *est inversible pour un* z_0 *dans* Ω *et* T *à valeurs opérateur traçable, alors le rang du résidu de la fonction méromorphe* $U_1(1+T)^{-1}U_2$ *en* 0 *est au plus égal à la multiplicité algébrique de* 0 *comme zéro de la fonction* $\det(1+T)$.

Preuve : L'anneau local $\mathcal{O}_1$ des germes des fonctions holomorphes étant principal, multipliant à droite et à gauche par des éléments de $\mathrm{GL}(d,\mathcal{O}_1)$, il est loisible de supposer A dans $M(d,\mathcal{O}_1)$ de la forme

$$\sum_{p\in\mathbf{Z}} \pi_p z^p$$

avec une résolution de l'identité $(\pi_p)_{p\in\mathbf{Z}\cup\{\infty\}}$ de projecteurs (nuls sauf pour un nombre fini) tels que $\pi_p\pi_q = 0, p\neq q$ et $\sum_{p\in\mathbf{Z}\cup\{\infty\}}\pi_p = 1_d$ (*cf.* [3, VII, 4.5] pour la théorie des facteurs invariants d'une matrice sur un anneau principal). Via une réduction à la dimension finie, cette écriture vaut aussi pour $A = 1+T$ avec T fonction à valeurs opérateur compact dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, avec tous les π_p de rang fini à l'exception de π_0. Pour T à valeurs opérateur traçable, le projecteur π_∞ est nul si et seulement si le germe holomorphe $\det(1+T)$ l'est.

Si le germe $U_i, i = 1, 2$ a un développement de Taylor de la forme $U_i(z) = \sum_{p\geq 0} U_{ip}z^p$, le résidu de $U_1(1+T)^{-1}U_2$ à l'origine est alors

$$\operatorname{res}_0(U_1(1+T)^{-1}U_2) = \sum_{p-q+r=-1} U_{1p}\pi_q U_{2r}$$

de rang

$$\operatorname{rang}\operatorname{res}_0(U_1(1+T)^{-1}U_2) =\leq \sum_{p-q+r=-1}\operatorname{rang}(U_{1p}\pi_q U_{2r}) \leq \sum_{q\geq 0} q \operatorname{rang}\pi_q = v\,,$$

v étant exactement la valence du déterminant $\det(1+T)$ en $z = 0$. $\square$

Divers choix sont possibles pour la famille L_r et l'entier N apparaissant dans le déterminant D_r : un d'entre eux (essentiellement celui de Vodev [19]) adopte un L_r traçable (avec ainsi $N = 1$), un second (apparaissant dans [5]), utilisé pour des perturbations de type particulier (elliptique notamment), introduit un opérateur L_r ne dépendant pas de r (mais dans une classe de Schatten d'ordre éventuellement élevé). Le déterminant D_r est analysé de manière très similaire dans chacun de ces deux choix, dont la présentation simultanée, sans alourdir trop l'exposé, paraît avoir son intérêt.

En premier lieu, soit $j_r = [\varphi_H(2r/\sqrt{C})]$ avec $C = \sup_{j\leq 1}\mu_j(\chi_3 R_H(z_0)\chi_2)f_H(j)^{-2}$. La résolvante localisée $\chi_3 R_H(z_0)\chi_2$ est décomposée suivant

$$\chi_3 R_H(z_0)\chi_2 = R_r + \varepsilon_r$$

où R_r est la projection de $\chi_3 R_H(z_0)\chi_2$ sur l'espace des opérateurs de rang fini j_r : les valeurs singulières $(\mu_j(R_r))_{j\geq 1}$ sont celles de $\chi_3 R_H(z_0)\chi_2$ si $j\leq j_r$, nulles autrement et $||\varepsilon_r|| = \mu_{j_r+1}(\chi_3 R_H(z_0)\chi_2) \leq Cf_H(j_r+1)^{-2} \leq r^{-2}/4$.

Si η_r est défini sur $\mathbf{C}$ par

$$\eta_r(z) = \begin{cases} (z_0^2 - z^2)\varepsilon_r\,, & \text{pour } n \text{ impair}\,,\\ z_0^2\varepsilon_{|z_0|} - z^2\varepsilon_r\,, & \text{pour } n \text{ pair}\,,\end{cases}$$

alors, pourvu que $r > |z_0|$, $||\eta_r|| \leq 1/2$ sur $D_n(0,r)$, et l'inverse $(1+\eta_r)^{-1}$ est défini holomorphe sur $D_n(0,r)$, ainsi que L_r défini par

$$1 + K(z_0,z)\chi_{\rho_0+1} = (1+\eta_r(z))(1-L_r(z))\,. \tag{4}$$

L'opérateur $L_r(z)$, somme des trois opérateurs traçables

$$ {}_1L_r(z) = \begin{cases} (1+\eta_r(z))^{-1}\left[-[\Delta_n,\chi_3]R_H(z_0)\chi_1\right]\,, & \text{si } n \text{ est impair,}\\ (1+\eta_r(z))^{-1}\left[-[\Delta_n,\chi_3]R_H(z_0)\chi_1 - z_0^2 R_{|z_0|}\right]\,, & \text{sinon,}\end{cases} \tag{5}$$

$$ {}_2L_r(z) = \begin{cases} (1+\eta_r(z))^{-1}(z^2 - z_0^2)R_r\,, & \text{si } n \text{ est impair,}\\ (1+\eta_r(z))^{-1}z^2 R_r\,, & \text{sinon,}\end{cases} \tag{6}$$

$$ {}_3L_r(z) = (1+\eta_r(z))^{-1}[\Delta_n,\chi_1]R_{\Delta_n}(z)(\chi_{\rho_0+1} - \chi_2)\,, \tag{7}$$

l'est aussi ; les résonances dans $D_(0,r)$, pôles de la résolvante localisée s'écrivant suivant (2) et (4)

$$R_H\chi_{\rho_0+1} = P(z_0,\cdot)\chi_{\rho_0+1}(1-L_r)^{-1}(1+\eta_r)^{-1} \tag{8}$$

sont, avec multiplicité, parmi les zéros du déterminant $D_r = \det(1-L_r)$ d'après le lemme 1.

D'autre part, si la fonction f_H de la définition 1 est définie sur $\mathbf{R}^+$, vérifiant $f_H(t\tau) \leq C\tau^\delta f_H(t)$ pour $t, \tau \geq 0$ (comme c'est le cas de la fonction $t^{1/n}$ des perturbations elliptiques), la résolvante localisée $\chi_3 R_H(z_0)\chi_2$ est à valeurs dans la classe de Schatten d'ordre $N = [(2\delta)^{-1}] + 1$ et donc aussi $L_0 = -K(z_0, \cdot)\chi_{\rho_0+1}$. La factorisation (8) est remplacée par

$$R_H \chi_{\rho_0+1} = P(z_0, \cdot)\chi_{\rho_0+1}(1 + L_0 + \ldots + L_0^{N-1})(1 - L_0^N)^{-1}.$$

L'opérateur $L_r = L_0$ (et donc D_r noté dans ce cas D_H) peut donc être pris indépendant de r, avec une décomposition en trois termes analogues à (5)–(7) (sans facteur $(1+\eta_r)^{-1}$, ni troncature en fréquences pour $\chi_3 R_H(z_0)\chi_2$), dont le premier et le second sont dans la classe de Schatten d'ordre N et le troisième traçable.

Pour les perturbations hypoelliptiques où $\varphi_H(\lambda) = \lambda^n \log \lambda, \lambda \leq 1$ (dont l'inverse f_H ne vérifie pas la condition *(iii)* de la définition 1 sur $\mathbf{R}^+$), la troncature en fréquences de $\chi_3 R_H(z_0)\chi_2$ permet d'obtenir l'estimation optimale du théorème. Il se peut aussi que la résolvante localisée $\chi_3 R_H(z_0)\chi_2$ ne soit dans aucune classe de Schatten, comme pour l'opérateur de Schrödinger $\Delta_1 + q$ de la figure 1 (c).

La croissance à l'infini de D_r

Le type de croissance du déterminant D_r est ramené à celui de déterminants plus simples grâce au lemme suivant : pour B opérateur borné, $|B|$ y note sa racine carrée $\sqrt{B^*B}$, dont la suite des valeurs propres $(\mu_j(B))_{j\geq 1}$ est celle des valeurs singulières de B.

Lemme 2 *Pour B opérateur borné, P et Q opérateurs compacts dans la classe de Schatten d'ordre p entier et S et T opérateurs traçables*

$$\begin{aligned}
|\det(1+BT)| &\leq \det(1 + ||B||\,|T|)\,, && (9)\\
|\det(1+(P+Q)^p)| &\leq \det(1+|P+Q|^p)^p \leq (\det(1+2^{p-1}|P|^p)\det(1+2^{p-1}|Q|^p))^{2p}\,, && (10)\\
\det(1+|T|^k) &\leq (\det(1+|T|))^k\,, &&\\
|\det(1+ST)| &\leq (\det(1+|S|)\det(1+|T|))^2\,. && (11)
\end{aligned}$$

Preuve : D'une part, pour T opérateur traçable, dont le spectre $(\lambda_j(T))_{j\geq 1}$ est rangé par module décroissant $|\lambda_1(T)| \geq \lambda_2(T) \geq \ldots \geq |\lambda_n(T)| \to 0$, l'inégalité de Weyl (*cf.* [4, p. 35])

$$\prod_{j=1}^{N}(1 + |\lambda_j(T)|) \leq \prod_{j=1}^{N}(1 + \mu_j(T))$$

fournit, pour le déterminant $\det(1+T) = \prod_{j\geq 1} 1 + \lambda_j(T)$, l'inégalité $|\det[1+T]| \leq \det[1+|T|]$.

D'autre part, pour $k, j \geq 1$, les sous-additivités logarithmiques (*cf.* [4, p. 30]) des valeurs singulières d'une somme et d'un produit donnent

$$\begin{aligned}
\mu_{j+k-1}(P+Q) &\leq \mu_j(P) + \mu_k(Q)\,.\\
\mu_{p(j-1)+k}(P^p) &\leq \mu_j(P)^{p-1}\mu_{j+k-1}(P) \leq \mu_j(P)^p\,.
\end{aligned}$$

Alors, les inégalités (10) sont établies suivant

$$\begin{aligned}
|\det(1+(P+Q)^p)| &\leq \det(1+|(P+Q)^p|) = \prod_{k=1}^{p}\prod_{j=1}^{\infty} 1 + \mu_{p(j-1)+k}((P+Q)^p)\\
&\leq \left[\prod_{j=1}^{\infty} 1 + \mu_j(P+Q)^p\right]^p = \det(1+|P+Q|^p)^p\\
&\leq \left[\prod_{j=1}^{\infty} 1 + (\mu_j(P)+\mu_j(Q))^p \prod_{j=1}^{\infty} 1 + (\mu_j(P)+\mu_{j+1}(Q))^p\right]^p\\
&\leq \left[\prod_{j=1}^{\infty}(1+2^{p-1}\mu_j(P)^p)(1+2^{p-1}\mu_j(Q)^p)\right]^{2p}\\
&= \det(1+2^{p-1}|P|^p)^{2p}\det(1+2^{p-1}|Q|^p)^{2p}\,.
\end{aligned}$$

La preuve des autres inégalités est similaire. $\square$

Ainsi le déterminant D_r a sa croissance dominée par celle du produit

$$\det(1 + 2^{N-1}|{}_1L_r|^N)^{2N} \det(1 + 2^{2N}|{}_2L_r|^N|)^{4N^2} \det(1 + 4|{}_3L_r|)^{4N^3} . \tag{12}$$

Vu (9) et $||(1+\eta_r)^{-1}|| \leq 2$, le premier facteur est borné sur $D_n(0,r)$, uniformément en r. La condition *(iii)* de la définition 1 donne la majoration du second facteur,

$$\det(1 + 2^{2N}|{}_2L_r(z)|^N|)^{4N^2} \leq \exp\left[C\left[\frac{|z|}{r}\right]^{\nu_H} \varphi_H(C\langle r\rangle)\right] , \, z \in D_n(0,r) , \tag{13}$$

grâce (à une nouvelle application de (10) si n est impair et) au lemme suivant :

Lemme 3 *Soit $\alpha = 0$ ou 1. Soit f une fonction croissante sur $[\alpha, \infty)$ avec $f(\alpha) > 0$, d'inverse φ et vérifiant $f(\tau t) \leq C_f \tau^\delta f(t)$ pour $t, \tau \geq \alpha$.*

Alors, si $\alpha = 0$, pour tout $d > \delta^{-1}$, et C', il existe une constante C, dépendant de C_f, d, δ et C', telle que, pour $x \geq 0$,

$$\prod_{j\geq 1} 1 + C'[x/f(j)]^d \leq \exp\left[C\left(\frac{x}{r}\right)^{1/\delta}\varphi(r)\right] , \, r \geq f(0) .$$

Si $\alpha = 1$, pour tout C', il existe une constante C, dépendant de C_f, d, δ et C', telle que, pour $r \geq f(1)$ et $0 \leq x \leq r$,

$$\prod_{\varphi(x)\geq j\geq 1} 1 + C'[x/f(j)]^d \leq \begin{cases} \exp\left[C\left[\frac{x}{r}\right]^d\varphi(r)\right] , & si \ d\delta < 1 , \\ \exp\left[C\frac{x}{r}\left(1 + \log\frac{r}{x}\right)\varphi(r)\right] , & si \ d\delta = 1 , \\ \exp\left[C\left[\frac{x}{r}\right]^\delta\varphi(r)\right] , & si \ d\delta > 1 . \end{cases}$$

Preuve : La preuve commence par les inégalités

$$\begin{aligned} \prod_{[\alpha^{-1}\varphi(x)]\geq j\geq 1} 1 + C'[x/f(j)]^d &= \exp \sum_{[\alpha^{-1}\varphi(x)]\geq j\geq 1} \log(1 + C'[x/f(j)]^d) \\ &\leq \exp \sum_{[\alpha^{-1}\varphi(x)]\geq j\geq 1} \log(1 + C'C_f^d x^d(\varphi(r)/j)^{d\delta}r^{-d}) \\ &\leq \exp \int_0^{\alpha^{-1}\varphi(r)} \log(1 + C'C_f^d x^d(\varphi(r)/j)^{d\delta}r^{-d})\, dj \\ &\leq \exp\left[\left[\frac{x}{r}\right]^{1/\delta}\varphi(r)\int_0^{\alpha^{-1}(r/x)^{1/\delta}} \log(1 + C'C_f^d u^{-d\delta})\, du\right] , \end{aligned}$$

et s'achève par l'examen de la convergence de l'intégrale $\int \log(1+u^{-\eta})du$ aux bornes. $\square$

Le dernier facteur de (12) est majoré à la suite du déterminant $\det(1 + 8|[\Delta_n, \chi_1]R_{\Delta_n}(z)(\chi_{\rho_0+1} - \chi_2)|)$ sur $D_n(0,r)$, qui est tout d'abord estimé pour z dans le feuillet $\mathbf{F}_0$

$$\det(1 + 8|[\Delta_n, \chi_1]R_{\Delta_n}(z)(\chi_{\rho_0+1} - \chi_2)|) \leq \exp\left[C\langle z\rangle^n\right] , \, z \in \mathbf{F}_0 \cap (D_n(0,r) \setminus D_n(0,1)) , \tag{14}$$

comme cas particulier du lemme général :

Lemme 4 *Soient $Q_i, i = 1,2$, des opérateurs différentiels d'ordre q_i, à support compact, tels que* $\operatorname{supp} Q_1 \cap \operatorname{supp} Q_2 = \emptyset$. *Alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante C_α (dépendant aussi de Q_1 et Q_2) telle que sur le demi-plan tronqué $\Im m z \geq 0 \setminus D(0,1)$*

$$\begin{aligned} \mu_j(Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2) &\leq C_\alpha \langle z\rangle^{\alpha+q_1+q_2-1} j^{-\alpha/n} , \, \alpha > 0 , \\ \det(1 + |Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2|) &\leq \exp\left[C_\alpha \langle z\rangle^{n(\alpha+q_1+q_2-1)/\alpha}\right] , \, \alpha > n . \end{aligned} \tag{15}$$

Preuve : L'estimation
$$||Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2|| \leq C_{Q_1,Q_2} \langle z \rangle^{q_1+q_2-1} \tag{16}$$
résulte de l'expression de la résolvante comme transformée de Laplace de l'opérateur des ondes
$$Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2 = iz^{-1} \int_0^\infty e^{itz} Q_1 \cos(t\sqrt{\Delta_n}) Q_2 \, dt \,,$$
d'intégrations par parties, avec $\widetilde{Q}_i = Q_i(1+\sqrt{\Delta_n})^{-q_i}, i = 1, 2,$
$$Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2 = \widetilde{Q}_1 \sum_{k=0}^{q_1+q_2} \binom{q_1+q_2}{k} (-iz)^{k-1} \int_0^\infty e^{itz} \frac{d^{4(q_1+q_2)-k} \cos}{du}(t\sqrt{\Delta_n}) \, dt \, \widetilde{Q}_2 + \dots$$
et des propriétés de propagation de l'opérateur des ondes (principe de Huyghens en dimension impaire, forme explicite du noyau en dimension paire).

Soit Ω ouvert relativement compact à bord lisse contenant le support de Q_1 et Q_2. Si Δ^Ω désigne le laplacien sur $L^2(\Omega)$ avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$
$$\mu_j(Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2) \leq \mu_j((\Delta^\Omega)^{-\alpha/2}) \, ||(\Delta^\Omega)^{\alpha/2} Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2)||,$$
et donc, via (16),
$$\mu_j(Q_1 R_{\Delta_n}(z) Q_2) \leq \widetilde{C}_\alpha j^{-\alpha/n} \langle z \rangle^{\alpha+q_1+q_2-1} \,.$$
L'inégalité (15) résulte alors du lemme 3. □

Pour $n \geq 3$, la fonction résolvante R_{Δ_n} définie sur $\mathbf{F}_0 \setminus \{0\}$ a un prolongement continu en $z = 0$ et donc (14) est valide sans restriction pour $z \in \mathbf{F}_0 \cap D_n(0, r)$. Le cas des basses dimensions est réglé par le lemme suivant :

Lemme 5 *Soit $s_n(z) = |z|^{-1}$ ($\log(e/z)$ resp.) si $n = 1$ ($n = 2$ resp.) et $|z| \leq 1$, sinon identiquement égal à 1. Alors il existe une constante C telle que*
$$\det(1 + 8|[\Delta_n, \chi_1] R_{\Delta_n}(z)(\chi_{\rho_0+1} - \chi_2)|) \leq C s_n(z)^2 \,, \, z \in \mathbf{F}_0 \cap D(0,1) \setminus \{0\} \,.$$
Preuve : La fonction $[\Delta_n, \chi_1] R_{\Delta_n}(\chi_{\rho_0+1} - \chi_2)|)$ à valeur opérateur définie sur Σ est de la forme $S_0 \widetilde{s}_n + H_n$ avec S_0 de rang 1, $\widetilde{s}_n(z) = z^{-1}, \log z$ ou 0 suivant que $n = 1, 2$ ou $n \geq 3$ et H_n, avec un prolongement continu en $z = 0$ comme fonction à valeurs opérateur traçable. Il suffit d'appliquer à cette décomposition (10) avec $p = 1$. □

L'estimation du déterminant (14) sur les feuillets non physiques $\mathbf{F}_*$ de la courbe spectrale Σ_n est obtenue via la formule de Green avec bord rejeté sur la sphère à l'infini S^{n-1} pour le laplacien Δ_n
$$R_{\Delta_n}(\tilde{z}) = R_{\Delta_n}(z) - m(-1)^{[(n-2)/2](m+1)} T_n(z) \,, \tag{17}$$
où $\tilde{z} \in \mathbf{F}_m$ ($m = -1$ si n impair) et $z \in \mathbf{F}_0$ ont même projection (via π_n) dans $\mathbf{C}$ et l'opérateur $T_n(z), z \in \mathbf{C}$ est défini suivant
$$T_n(z) = \frac{i}{4} \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{n-2} \mathbf{E}_n^*(\overline{z}) \mathbf{E}_n(z), \tag{18}$$
l'opérateur $\mathbf{E}_n(z)$ de $L^2(\mathbf{E}^n)$ dans $L^2(S^{n-1})$ ayant pour noyau $e^{-iz\langle\omega,x\rangle}, (\omega, x) \in S^{n-1} \times \mathbf{E}^n$. Ainsi, via l'inégalité (11), la croissance du déterminant (14) sur les feuillets non physiques revient à celle du même (14) sur le feuillet physique et de celle du déterminant induit par l'opérateur $T_n(z), z \in \mathbf{C}$ qui est donnée par le lemme suivant :

Lemme 6 *Soient Q_1, Q_2 des opérateurs différentiels d'ordre q_1, q_2 et à support compact dans $\mathbf{E}_n$. Il existe alors une constante C telle que*
$$\det(1 + e^y |Q_1 T_n(z) Q_2|) \leq \exp[C(y + \langle z \rangle)^n] \,, \, z \in \mathbf{C}, y > 0 \,. \tag{19}$$

Preuve : La factorisation

$$T_n(z) = \frac{i}{4}(z/2\pi)^{n-2}\mathbf{E}_n^*(\overline{z})(1+\Delta^{S^{n-1}})^k(1+\Delta^{S^{n-1}})^{-k}\mathbf{E}_n(z)$$

amène l'inégalité pour les valeurs singulières, avec k entier

$$\mu_j(Q_1T_n(z)Q_2) \leq C\langle z\rangle^{n-2}\left|\left|Q_1\mathbf{E}_n^*(\overline{z})\left(1+\Delta^{S^{n-1}}\right)^k\right|\right|\ \mu_j\left[\left(1+\Delta^{S^{n-1}}\right)^{-k}\right]\ ||\mathbf{E}_n(z)Q_2||\ .$$

La majoration du noyau

$$|Q_1\mathbf{E}_n^*(\overline{z})\left(1+\Delta^{S^{n-1}}\right)^k(x,\omega)| \leq \langle z\rangle^{q_1}C^k((2k)!+\langle z\rangle^{2k})e^{C\langle z\rangle} \leq \widetilde{C}^k(2k)!e^{\widetilde{C}\langle z\rangle}$$

induit celle de la norme de l'opérateur

$$||Q_1\mathbf{E}_n^*(\overline{z})\left(1+\Delta^{S^{n-1}}\right)^k|| \leq C^k(2k)!\,e^{C\langle z\rangle} \leq (\sqrt{C}2k)^{2k}e^{C\langle z\rangle}\ .$$

Ainsi

$$\mu_j(Q_1T_n(z)Q_2) \leq (j^{-1/(n-1)}\sqrt{C}2k)^{2k}e^{C\langle z\rangle}$$

et, en utilisant que $\inf_{u>0}(\beta u)^u = e^{-(e\beta)^{-1}}$ avec $\beta \in (0,1)$,

$$\mu_j(Q_1T_n(z)Q_2) \leq \exp[C\langle z\rangle - j^{1/(n-1)}/C]\ .$$

Par suite

$$\begin{aligned}\det(1+e^y|Q_1T_n(z)Q_2|) &= \prod_{j\geq 1} 1+e^y\mu_j(Q_1T_n(z)Q_2)\\ &\leq \prod_{1\leq j<\widetilde{C}(y+\langle z\rangle)^{n-1}} 1+\exp(y+C\langle z\rangle) \prod_{j\geq\widetilde{C}(y+\langle z\rangle)^{n-1}} 1+\exp(-j^{1/(n-1)}/C)\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

N'oubliant pas que $\langle z\rangle^n \leq C[\langle z\rangle/\langle r\rangle]^n\varphi_H(C\langle r\rangle), z\in D_n(0,r)$, les majorations de chacun des facteurs de (12) données par (13) et (14) et le lemme 6 fournissent celle du déterminant D_r au voisinage de l'infini :

Lemme 7 *Soit H une perturbation admissible du laplacien de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, telle que décrite par la définition 1. Avec la fonction s_n introduite dans le lemme 5, il existe une constante C telle que, pour $z\in D_n(0,r)$*

$$\log|D_r(z)| \leq \begin{cases} C\left[\left[\dfrac{|z|}{r}\right]^{\nu_H}\varphi_H(C\langle r\rangle)+\log s_n(z)+1\right]\,, & \textit{si } n \textit{ est impair}\\ C\left[\log^n\langle \operatorname{Arg} z\rangle + \left[\dfrac{|z|}{r}\right]^{\nu_H}\varphi_H(C\langle r\rangle)+\log s_n(z)+1\right]\,, & \textit{sinon.}\end{cases} \tag{20}$$

La singularité de D_r à l'origine

Pour n impair au moins égal à trois, la fonction résolvante R_{Δ_n} est une fonction entière de la variable z et le déterminant D_r est une fonction holomorphe sur $D_n(0,r)$. Pour d'autres dimensions n, la singularité est décrite dans le lemme suivant :

Lemme 8 *Soit H une perturbation admissible du laplacien de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, telle que décrite par la définition 1.*

Si n est impair, D_r est holomorphe sur $D_n(0,r)$ (sur $D_n(0,r)\setminus\{0\}$ resp.) pour $n\geq 3$ (si $n=1$, avec un pôle d'ordre $p\geq 0$ resp.).

Si n est pair, il existe des entiers p,q et un polynôme P non nul tels que $D_r = {}_1D\,{}_2D_r$ avec le facteur ${}_1D$ (indépendant de r) vérifiant

$$ {}_1D(z) = z^p P(\log z)(1 + \mathcal{O}(z \log^q z)) \tag{21}$$

au voisinage de $z=0$ et l'autre holomorphe sur $D_n(0,r)\setminus\{0\}$, estimé supérieurement suivant

$$ |{}_2D_r(z)| \leq \exp\left[C\left[\frac{|z|}{r}\right]^{\nu_H}\varphi_H(C\langle r\rangle)\right]. \tag{22}$$

Preuve : Le cas de la dimension 1 se traite de manière analogue aux dimensions paires seules développées ici.

Au voisinage de $z=0$, pour le premier choix de L_r,

$$\begin{aligned} 1 - L_r(z) &= (1 - {}_2L_r(z))\Big(1 + (1 - z^2\chi_3 R_H(z_0)\chi_2 + z_0^2\varepsilon_{|z_0|})^{-1} \\ &\qquad [[\Delta_n,\chi_3]R_H(z_0)\chi_1 + z_0^2 R_{|z_0|} - [\Delta_n,\chi_1]R_{\Delta_n}(z)(\chi_{\rho_0+1}-\chi_2)]\Big), \end{aligned} \tag{23}$$

où le premier facteur, valant 1 pour $z=0$, a un déterminant (noté ${}_2D_r$) majoré, d'après le lemme 3, par $C\exp[C\,[|z|/r]^{\nu_H}\,\varphi_H(C\langle r\rangle)]$ et le dernier facteur ne dépend pas de r. Pour le second choix de L_r, où D_r ne dépend pas de r, ${}_2D_r$ est pris trivial égal à 1.

D'après [1, 9.1], $u^{(n-2)/2}H^{(1)}_{(n-2)/2}(u)$ est de la forme $a_n(u)+\log u\, b_n(u)$ avec a_n, b_n entières et $b_n(0)$ nul si $n\geq 4$. La fonction résolvante R_{Δ_n} s'écrit donc, d'après (1), suivant

$$R_{\Delta_n}(z) = A_n(z) + \log z B_n(z)$$

avec A_n, B_n entières, $A_n(0)$ et $B_n(0)$ de rang fini, $B_n(0)$ nul si $n\geq 4$. Alors, D_H étant défini comme le déterminant du dernier facteur de (23) pour le premier choix de L_r ou comme le déterminant de $1-L_r^N$ dans le cas du second, il existe des opérateurs de rang fini $F_j, 0\leq j\leq N$ ($F_j, 1\leq j\leq N$, nuls si $n\geq 4$), un opérateur traçable T_0 avec $1+T_0$ inversible et des fonctions entières $E_j, 0\leq j\leq N$, à valeurs opérateur traçable telles que

$$\begin{aligned} D_H(z) &= \det\left[1 + \sum_{0\leq j\leq N}\log^j z F_j + T_0 + \sum_{0\leq j\leq N} z\log^j z E_j(z)\right] \\ &= \det\left[1 + \sum_{0\leq j\leq N}\log^j z F_j (1+T(z))^{-1}\right]\det(1+T(z)) \end{aligned} \tag{24}$$

avec $T(z) = T_0 + \sum_{0\leq j\leq N} z\log^j z E_j(z)$. Via les substitutions $u_{j+1} = z\log^j z, 0\leq j\leq N$ et $V=\log z$, le premier facteur $D_{H,1}$ de (24) provient d'un élément S de l'anneau $\mathbf{C}[V]\{\{u_1,u_2,\ldots,u_{N+1}\}\}$ des séries formelles convergentes en $(u_1,\ldots,u_{N+1})$ à coefficients polynômes en V de la forme $S=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{N+1}}P_\alpha(V)\boldsymbol{u}^\alpha$. Le facteur $D_{H,1}$ n'étant pas identiquement nul, il existe un plus petit k tel que

$$\widetilde{P}_k(V,z) = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{N+1}:|\alpha|=k} P_\alpha(V)\prod_{j=0}^{N}\log^{j\alpha_{j+1}} z$$

soit non nul et ainsi, pour un entier r

$$D_{H,1}(z) = z^k\widetilde{P}_k(\log z, z)[1+\mathcal{O}(z\log^r z)].$$

La description de ${}_1D$ s'achève en remarquant que le second facteur de (24) est de la forme $d_0(1+\mathcal{O}(z\log^N z))$ avec $d_0 = \det(1+T_0)$ non nul. □

Usage des formules de Jensen et de Carleman

En dimension impaire, la valeur $D_r(z_0)$ ne dépend pas de r. Ainsi, la formule de Jensen [2, 1.2.1]

$$\int_0^{\tilde r} \frac{n(h,z_0,t)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=\tilde r} \log|h(z)|dz - \log|h(z_0)|\,,$$

appliquée à la fonction holomorphe h_{pr} définie par $h_{pr}(z) = z^p D_r(z)$ avec p donné par le lemme 8, permet de majorer, pour $\alpha > 1$, le nombre $n(h_{pr}, z_0, \tilde r/\alpha)$ de zéros de h_{pr} dans le disque $D_n(z_0, \tilde r/\alpha), \tilde r \le r - |z_0|$ et donc, pour $r_\alpha = (r-|z_0|)/\alpha - |z_0|$, le nombre de zéros $n(h_{pr}, 0, r_\alpha)$, *i. e.* le nombre de résonances dans le disque $D_n(0, r_\alpha)$, comme l'énonce le théorème (*cf.* figure 2(a)).

En dimension n paire, l'usage de Jensen est remplacé par celui de la formule de Carleman [2, 1.2.2]

$$\sum_{h(\zeta)=0}\left[\frac{r}{|\zeta|}-\frac{|\zeta|}{r}\right]\cos\operatorname{Arg}\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\log|h(re^{i\theta})|\cos\theta\,d\theta \qquad (25)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^1 (t^{-2}-1)\log|h(irt)h(-irt)|\,dt + \frac{\Re e h'(0)}{2}\,,$$

où la somme porte sur l'ensemble des zéros de h dans $\overline{D_r^+}$: cette formule est valable pour toute fonction holomorphe h sur le demi-disque $D_r^+ = D(0,r)\cap\{|\operatorname{Arg} z| < \pi/2\}$, continue sur son adhérence, dérivable en $z=0$ et telle que $h(z) = 1 + h'(0)z + \mathcal{O}(|z|^\beta)$ au voisinage de $z=0$ avec $\beta > 1$.

Soit $\widetilde P$ le polynôme de même degré que le polynôme P du lemme 8, valant 1 à l'origine et tel que la fonction $\underline{P}$ définie par sur $\mathbf{\Lambda}$ par $\underline{P} = \widetilde P(z)/P(\log z)$ soit holomorphe. La formule de Carleman, convenablement normalisée, va être appliquée à la fonction holomorphe h_{pPr} définie par $h_{pPr} = \widetilde P(z) D_r(z)/[z^p P(\log z)]$ sur $D_n(0,r)\setminus\{0\}$.

Soit $\alpha > 1$. Le nombre de zéros $n(h_{pPr}, a/\alpha, r/\alpha)$ de h_{pPr} dans $D_n(0, r/\alpha)\cap\{|\operatorname{Arg} z| \le a/\alpha\}$ est celui, dans le secteur $D_n(0,(r/\alpha)^{\pi/(2a)})\cap\{|\operatorname{Arg} z| \le \pi/(2\alpha)\}$ de la fonction $h_{pPr}(a)$ définie par $h_{pPr}(a)(\zeta) = h_{pPr}(\zeta^{2a/\pi})$ dans $D^+_{r^{\pi/(2a)}}$ (*cf.* figure 2(b)). La formule (25) pour cette fonction $h_{pPr}(a)$ envisagée sur le demi-disque $D^+_{r^{\pi/(2a)}}$, a son membre de gauche minoré, pour $a > 1$, par

$$\cos\frac{2\pi}{\alpha}\sum_\zeta\left[\frac{r^{\pi/2a}}{|\zeta|}-\frac{|\zeta|}{r^{\pi/2a}}\right] \ge \cos\frac{2\pi}{\alpha}\left(\alpha^{\pi/(2a)}-\alpha^{-\pi/(2a)}\right)n(h_{pPr}, a/\alpha, r/\alpha) \ge C_\alpha\frac{n(h_{pPr}, a/\alpha, r/\alpha)}{a}\,, \qquad (26)$$

où la première somme porte sur les zéros ζ de $h_{pPr}(a)$ dans le secteur $D_n(0,(r/\alpha)^{\pi/(2a)})\cap\{|\operatorname{Arg} z| \le \pi/(2\alpha)\}$. Sa partie droite est majorée par la somme de $\sup_{|\theta|\le a}\log^+|h_{pPr}(re^{i\theta})|$ $(\le C(\log^n\langle a\rangle + \varphi_H(C\langle r\rangle))$ d'après le lemme 7) et de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \log^+|h_{pPr}(a)(ir^{\pi/(2a)}t)h_{pPr}(a)(-ir^{\pi/(2a)}t)|\frac{dt}{t^2} = \frac{r^{\pi/(2a)}}{4a}\int_0^r \log^+|h_{pPr}(e^{ia}u)h_{pPr}(e^{-ia}u)|\frac{du}{u^{1+\pi/(2a)}}\,. \qquad (27)$$

D'après (21) et (22), au voisinage de $z=0$,

$$\log^+|h_{pPr}(z)| \le |z|\,|\log z|^q + C\left[\frac{|z|}{r}\right]^{\nu_H}\varphi_H(C\langle r\rangle)\,, \qquad (28)$$

soit, pour $|z| \le a^{-2q}$ et $|Arg z| \le a$, vu $|z\log^q z| \le C|z|^{1/2}$,

$$\log^+|h_{pPr}(z)| \le C|z|^{1/2} + C\left[\frac{|z|}{r}\right]^{\nu_H}\varphi_H(C\langle r\rangle)\,.$$

D'autre part, pour $|z| \ge a^{-2q}$, vu $|\tilde P(z)/z^p P(\log z)| \le Ca^{2pq}$ et $\log s_n(z) \le \log a$,

$$\log|h_{pPr}(z)| \le \log|D_r(z)| + \log\left[\frac{\tilde P}{z^p P(\log z)}\right] \le C\left[\log^n\langle\operatorname{Arg} z\rangle + \left[\frac{|z|}{r}\right]^{\nu_H}\varphi_H(C\langle r\rangle) + \log a\right]\,.$$

Ainsi le terme (27) est majoré par

$$\frac{r^{\pi/(2a)}}{4a}\left[\int_0^{a^{-2q}}\frac{du}{u^{1/2+\pi/(2a)}}+\log^n\langle a\rangle\int_{a^{-2q}}^{r}\frac{du}{u^{1+\pi/(2a)}}+C\varphi_H(\langle r\rangle)r^{-\nu_H}\int_0^r\frac{du}{u^{1+\pi/(2a)-\nu_H}}\right]$$
$$\leq \frac{r^{\pi/(2a)}}{4a}\left[\frac{2a^{-q(1-\pi/a)}}{1-\pi/a}+\frac{2a}{\pi}\log^n\langle a\rangle a^{q\pi/a}+C\varphi_H(\langle r\rangle)\frac{r^{\pi/(2a)}}{\nu_H-\pi/2a}\right]$$
$$\leq r^{\pi/(2a)}\left[C/a+\log^n\langle a\rangle+C\varphi_H(\langle r\rangle)\right] ,$$

ce qui donne, avec (26) et en remarquant

$$r^{\pi/(2a)}2a\log^n\langle a\rangle \leq C\left[r^n+Ca\log^n\langle a\rangle\right] ,$$

l'estimation du théorème pour $n(h_{pPr}, a/\alpha, r/\alpha)$, qui voit sa partie paire ainsi démontrée.

Références bibliographiques

[1] M. Abramowitz et I. Stegun. *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.

[2] R. Boas. *Entire functions*, Academic Press, New-York, 1954.

[3] N. Bourbaki. Éléments de mathématiques, II. Algèbre, chapitres 6 & 7, Hermann, Paris, 1964.

[4] I. Gohberg et M. Krein. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, **18**, Amer. Math. Soc., 1969.

[5] L. Guillopé et M. Zworski. *Upper bounds on the number of resonances for non-compact Riemann surfaces*, prépublication, 1993.

[6] L. Guillopé et M. Zworski. *Polynomial bounds on the number of resonances for some complete spaces of constant negative curvature near infinity*, prépublication, 1993.

[7] A. Intissar. *A polynomial bound on the number of scattering poles for a potential in even dimensional space in* $\mathbf{R}^n$, Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 367–396.

[8] P. Lax et R. Phillips, *Scattering theory*, Academic Press, New York, 1967.

[9] R. Melrose. *Polynomial bounds on the distribution of poles in scattering by an obstacle*, Journées *Équations aux Dérivées partielles*, Saint-Jean de Monts, 1984.

[10] W. Müller. *Spectral geometry and scattering theory for certain complete surfaces of finite volume*, Invent. Math. **109** (1992), 265–305.

[11] L. Parnovski. *Spectral asymptotics of the Laplace operator on surfaces with cusps*, preprint, 1993.

[12] J. Sjöstrand et M. Zworski. *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 729-769.

[13] J. Sjöstrand et M. Zworski. *Distribution of scattering poles near the real axis*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1021–1035.

[14] J. Sjöstrand et M. Zworski. *Estimates on the number of scattering poles for strictly convex obstacles near the real axis*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993) 769–790.

[15] J. Sjöstrand et M. Zworski. *The complex scaling method for scattering by strictly convex obstacles*, prépublication, 1993.

[16] J. Sjöstrand et M. Zworski. *Lower bounds on the number of scattering poles*, Comm. Partial Differential Equations, **18** (1993), 847–857.

[17] J. Sjöstrand et M. Zworski. *Lower bounds on the number of scattering poles II*, prépublication, 1993.

[18] G. Vodev. *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles for metric perturbations of the Laplacian in* $\mathbf{R}^n$, Math. Ann. **291** (1991), 39–49.

[19] G. Vodev. *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 205–216.

[20] G. Vodev. *Sharp bounds on the number of scattering poles in even dimensional spaces*, Duke Math. J., à paraître.

[21] G. Vodev. *Sharp bounds on the number of scattering poles in the two dimensional case*, prépublication, 1993.

[22] G. Vodev. *Asymptotic on the number of scattering poles*, preprint, 1993.

[23] M. Zworski. *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles*, Duke Math. J. **59** (1989), 311-323.

[24] M. Zworski. *Distribution of poles for scattering on the real line*, J. Funct. Anal. **73** (1987), 277–296.

[25] M. Zworski. *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles of radial potentials*, J. Funct. Anal. **82** (1989), 370–403.

Institut Fourier, URA 188 C. N. R. S., BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France