Rencontres Mathématiques
École Normale Supérieure de Lyon
19–20 mai 1989

FLOTS GÉODÉSIQUES ET FONCTIONS ZETA

Laurent GUILLOPÉ

Soit M une surface riemannienne compacte orientée à courbure strictement négative et $\mathbf{L}$ l'ensemble des longueurs $l(C)$ des géodésiques (orientées lisses) fermées de M. Si h désigne l'entropie (topologique) du flot géodésique $(g_t, t \in \mathbf{R})$ sur le fibré unitaire T_1^*M de M, on a

$$h = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \#\{l \in L, l \leq t\}}{t} \qquad (T_M)$$

comme Bowen ([3]) le démontre pour une classe générale de flots, les flots hyperboliques de type A (suivant la terminologie smalienne ([30])).

La fonction de comptage $\pi_M(t) = \#\{l \in L, l \leq t\}$ est ainsi à croissance exponentielle : peut–on le préciser en donnant un équivalent de π_M (avec éventuellement un début de développement asymptotique ou une évaluation des restes) ?

Il est opportun de rapprocher le spectre L (désigné parfois comme spectre primitif des longueurs pour le distinguer du spectre des périodes des trajectoires périodiques du flot géodésique) de l'ensemble P des entiers premiers. A l'estimation (T_M) correspond

$$1 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \#\{p \in P, p \leq t\}}{\log t} \qquad (T_{\mathbf{N}})$$

que Tchebichev ([31]) a démontré par des considérations arithmétiques élémentaires ([8]). Il ne pût démontrer le théorème des nombres premiers

$$\#\{p \in P, p \leq t\} \sim \mathrm{li}(t) \ (= \int_2^t \frac{du}{\log u} \sim \frac{t}{\log t}) \qquad (P_{\mathbf{N}})$$

malgré des informations très précises : pour $x \geq 30$, il établit que $A \leq \pi_{\mathbf{N}}(t) \log t/t \leq 6A/5$ avec $A = \log[2^{1/2}3^{1/3}4^{1/4}/30^{1/30}] \simeq 0,921$ et que, si $\pi_{\mathbf{N}}$ a un asymptotique, alors il est nécessairement de la forme donnée par le théorème des nombres premiers.

On sait que les démonstrations classiques de celui–ci sont basées sur l'étude des propriétés analytiques du produit eulérien

$$E(s) = \prod_{p \in P} (1 - p^{-s})^{-1}$$

qui n'est rien d'autre que la fonction $\zeta_{\mathbf{N}}(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ de Riemann et on peut en résumer ainsi une preuve : la fonction $\zeta_{\mathbf{N}}$ de Riemann $E(s)$, dont le produit est convergent absolument sur le demi–plan $\{\Re e s > 1\}$, admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, avec $s = 1$ unique pôle simple sur la droite critique $\{\Re e s = 1\}$. Par un théorème taubérien (théorème d'Ikehara ([8])), on en déduit alors l'asymptotique $(P_{\mathbf{N}})$.

On introduit ainsi (suivant Smale [30]) la fonction ζ_M définie par le produit eulérien

$$\zeta_M(s) = \prod_{l \in L} (1 - e^{-sl})^{-1}$$

convergent sur le demi–plan $\{\Re e s > h\}$ d'après (T_M) et pour lequel on a le théorème :

Théorème 0.1 ([20]). — *La fonction ζ_M admet un prolongement méromorphe sur un voisinage de la droite $\{\Re e s = h\}$, avec s=h comme unique pôle, tel que $(s-h)\zeta_M(s)$ y soit continu.*

avec comme corollaire immédiat (en appliquant convenablement le théorème taubérien d'Ikehara)

Théorème 0.2 ([28],[17],[20]). —

$$\#\{l \in L, l \leq t\} \sim e^{ht}/ht \qquad (P_M)$$

Précisons que Selberg ([28]) obtient le théorème précédent seulement pour les variétés à courbure constante, en utilisant la formule de trace à laquelle son nom est désormais attaché, Margulis ([17]) semble obtenir le résultat en courbure variable (mais sans que les preuves ne soient publiées à ma connaissance), enfin Parry–Pollicot ([20]) établit les propriétés de méromorphie de la fonction ζ associée à un flot mélangeant de type A. D'après ces derniers résultats, on obtient le théorème des nombres premiers pour le flot géodésique sur toute variété riemannienne compacte orientée à courbure négative (ou voire sans points conjugués avec conditions sur la croissance des champs de Jacobi ([7])), sur certaines variétés non compacte à courbure négative dont l'ensemble des points non–errants est compact ([12]), dans le problème extérieur dans $\mathbf{R}^n$ avec n $(n > 2)$ obstacles strictement convexes.

Le problème de l'évaluation du reste dans (P) est lié au prolongement méromorphe de la fonction ζ dans une bande au–delà de la droite critique et de la localisation des zéros et pôles de la fonction ζ : on sait que la résolution de l'hypothèse de Riemann permettra de préciser de manière significative les estimations $\pi_{\mathbf{N}}(t) - \mathrm{li}(t)$ établies à ce jour. Ce n'est qu'en courbure négative constante, où la formule de trace de Selberg donne un prolongement méromorphe à la fonction ζ_M avec localisation précise de zéros et pôles, qu'on a une estimation du reste $\pi_M(t) - e^{ht}/ht$. Par ailleurs, il faut citer le résultat de RUELLE ([25]) sur le prolongement méromorphe de la fonction ζ associée à un flot d'Anosov à feuilletages stable/instable analytiques : il redonne certains résultats de SELBERG, certes avec beaucoup moins de précision, mais par une méthode tout à fait différente, cependant, d'après GHYS ([11]), un tel flot géodésique à feuilletage stable différentiable implique la courbure constante.

Ce problème de compter les orbites périodiques d'un flot a un analogue pour les systèmes dynamiques à temps discret, à savoir le décompte des points périodiques d'une transformation Φ d'un espace dans lui–même. On introduit pareillement une fonction ζ par $\zeta_\Phi(z) = \exp G_\Phi(z)$, avec la fonction génératrice G_Φ définie par

$$G_\Phi(z) = \sum_{m\geq 1} \frac{\#\,\mathrm{Fix}(\Phi^m)}{m} z^m,$$

où $\mathrm{Fix}(\Psi)$ est l'ensemble des points fixes de Ψ. Pour un décalage ([6]) plein ou l'action induite par une matrice hyperbolique à coefficients entiers sur le tore T^2, le lecteur vérifiera aisément le théorème général suivant

THÉORÈME 0.3 ([15]). — *Soit Φ un difféomorphisme de type A. Alors la fonction ζ_Φ est rationnelle. Il existe une suite finie de matrices $(A_i)_{i=0\ldots n}$ telle que $\zeta_\Phi(z) = \prod_{i=0}^n (\det(1 - zA_i))^{(-1)^{i+1}}$.*

On pourrait espérer un tel résultat pour les flots de type A, mais il n'en est rien : GALLOVOTI ([9]) et POLLICOT ([22]) ont construit des exemples de flots (obtenus par suspension sur des décalages de type fini) pour lesquels la fonction ζ a une singularité essentielle au–delà de la droite critique. On ne sait pas si la régularité et la géométrie du flot géodésique (qui sont oubliées lors du passage à la dynamique symbolique) forcent éventuellement l'existence d'un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ comme dans le cas de la courbure constante.

Il n'est pas question dans ce court exposé de vouloir traiter en détail les résultats que nous venons de décrire, nous nous limiterons à expliquer certaines articulations qui nous paraîssent importantes. La première partie est consacrée au cas particulièrement significatif de la courbure constante, on y introduit la fonction ζ de Selberg et on rappelle la formule de trace sous sa forme multiplicative ([32],[27]), qui exprime la fonction ζ de Selberg en terme du polynôme caractéristique du Laplacien (régularisé!), à des facteurs Γ près, le théorème 0.2 en résulte immédiatement. Préparant à la troisième partie, nous montrons comment le flot géodésique sur un pantalon hyperbolique (un exemple de *portée générale* selon M. MORSE ([19])) est dynamiquement équivalent à la suspension d'un décalage de type fini, le théorème de Bowen ([4]) établissant cette équivalence pour tous les flots de type A (donc notamment le flot géodésique sur une variété en courbure variable) nous permettra de nous concentrer sur les fonctions ζ pour des suspensions. L'objet central pour cette étude est l'opérateur de Ruelle $\mathcal{L}$, nous essaierons de l'introduire aussi naturellement que possible et montrerons que, pour une application temps de premier retour localement constante t, la fonction ζ s'exprime (encore!) comme un déterminant d'une famille d'opérateurs de Ruelle. Le résultat général de Parry–Pollicot repose sur des théorèmes concernant ces opérateurs, généralisant au cadre de la dimension infinie les propriétés spectrales de type Perron–Frobenius sur de matrices à coefficients positifs, nous ne pourrons que citer quelques–uns de leurs résultats renvoyant le lecteur aux travaux originaux mentionnés dans la bibliographie.

1. En courbure constante

Si la variété de dimension n porte une métrique à courbure constante négative $-K$, l'entropie du flot géodésique est $h = (n-1)K([16])$. On supposera dans cette partie que M est une surface riemannienne de courbure constante -1.

On introduit, suivant Selberg, la fonction, dite fonction ζ de Selberg,

$$Z_M(s) = \prod_{k\geq 0} \zeta_M(s+k)^{-1},$$

produit convergent sur le demi–plan $\{\Re es > 1\}$ d'après (T_M).

Si dv_g note la forme volume associée à la métrique de la surface M, le laplacien Δ est l'opérateur autoadjoint de $L^2(M, dv_g)$ associé à la forme quadratique $Q_g(f) = \int_M ||df||_g^2 dv_g$. C'est un opérateur positif, à résolvante compacte et spectre discret de valeurs propres $(\lambda_j) = (0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots)$ s'accumulant en $+\infty$.

Théorème 1.1 ([27],[32]). — *Soit* $E = \log 2\pi/2 - 1/4 - 2\zeta'_{\mathbf{N}}(-1)$.

$$Z_M(s) = \left[e^{E+s(s-1)}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_2(s)^2}(2\pi)^{-s}\right]^{2(g-1)} \det[\Delta + s(s-1)].$$

La fonction digamma de Barnes Γ_2 est analogue à la fonction classique Γ : elle a comme pôles les entiers négatifs (pôle $-n$ de multiplicité $n+1$), comme il apparaît dans sa représentation en produit de Weierstrass

$$\Gamma_2(s+1)^{-1} = (2\pi)^{s/2}e^{-1/2((1+\gamma)s^2+s)}\prod_{n\geq 1}(1+s/n)^n e^{-s+s^2/2n},$$

où γ est la constante d'Euler; elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_2(1+s) = \frac{\Gamma_2(s)}{\Gamma(s)}$$

et à la formule de réflexion

$$\frac{\Gamma_2(1+s)}{\Gamma_2(1-s)} = (2\pi)^{-s}\exp\int_0^s \frac{\pi u}{\operatorname{tg}\pi u}du.$$

Le “ polynôme caractéristique ” $\det[\Delta+s(1-s)]$ est défini par régularisation ζ (ce ζ n'ayant rien à voir avec celui qui est présent dans le titre de cet exposé) : si P est un opérateur elliptique opérant sur les sections d'un fibré vectoriel E à base compacte X, avec symbole principal à spectre positif, l'opérateur P est à résolvante compacte et spectre discret (μ_j) s'accumulant en $+\infty$ pour lequel on a formellement :

$$\log\det P = \log\prod_j \mu_j = \sum_j \log\mu_j = \sum_j \big[\frac{d}{dz}\mu_j^z\big]_{|z=0} = \Big[\frac{d}{dz}\sum_j \mu_j^z\Big]_{|z=0}$$

manipulations justifiées par le théorème suivant :

Théorème 1.2. — *Soit γ un contour de Cauchy (entourant le demi–axe $\mathbf{R}^+$) pour la fonction μ^z (i.e. $\mu^z = 1/2i\pi\int_\gamma u^z/(\mu-u)du$) et contenant en son intérieur le spectre de P. La fonction P^z définie par*

$$P^z = 1/2i\pi\int_\gamma u^z/(P-u)du$$

est à valeurs opérateurs à trace pour $\Re ez < -\dim X/\operatorname{ord} P$ et la fonction $\zeta_P(z) = \operatorname{tr} P^z$, définie pour $\Re ez < -\dim X/\operatorname{ord} P$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, régulier en $z=0$. Si on définit le déterminant de P par $\det P = \exp(\zeta_P'(O))$ et si $P(\lambda)$ est une famille avec dépendance holomorphe (pour la résolvante) en λ, alors le déterminant $\det P(\lambda)$ dépend holomorphiquement de λ.

La fonction Z_M a ainsi comme zéros les entiers négatifs (ses zéros *triviaux*) d'une part, les $1/2+r_j$ tels que $1/4-r_j^2=\lambda_j$ d'autre part (*i.e.* un nombre fini de zéros sur $[0,1]$ correspondant aux petites valeurs propres ($\leq 1/4$) du laplacien et une infinités de zéros sur la droite $\{\Re es = 1/2\}$). Son équation fonctionnelle se dérive simplement des relations fonctionnelles et formules de réflexion des fonctions Γ :

$$Z_M(s) = Z_M(1-s)\exp 4(g-1)\int_0^{s-1/2}\pi v\operatorname{tg}\pi v dv.$$

On en déduit facilement le théorème 0.1 pour la fonction ζ_M qui est obtenue à partir la fonction ζ de Selberg suivant

$$\zeta_M(s) = \frac{Z_M(s+1)}{Z_M(s)}.$$

Corollaire 1.3. — *La fonction ζ_M, méromorphe sur $\mathbf{C}$, a un pôle simple en $s=1$. Ses autres pôles sont aux entiers négatifs (avec multiplicité $\mu_0 = 2(g-1), \mu_{-1} = 4g-5, \mu_{-n} = 4(g-1)$ sinon) et aux $1/2+ir_j$, alors que l'ensemble de ses zéros est $\{-1/2-ir_j\}$ (les $r_j \in (-1/2,1/2)\cap i\mathbf{R}$ correspondant aux valeurs propres non nulles du laplacien suivant $1/4-r_j^2=\lambda_j$).*

La fonction ζ_M vérifie l'équation fonctionnelle

$$\zeta_M(s)\zeta_M(-s) = \Big(\frac{1}{2\sin\pi s}\Big)^{4(g-1)}.$$

Remarque. — On rapprochera ces résultats de ceux concernant la fonction $\zeta_{\mathbf{N}}$ de Riemann : elle possède un pôle unique en $s = 1$, simple de résidu $s = 1$, la localisation de ses zéros non triviaux est l'objet de la conjecture de Riemann, elle obéit à l'équation fonctionnelle $\zeta_{\mathbf{N}}(1-s) = \gamma_{\mathbf{N}}(s)\zeta_{\mathbf{N}}(s)$ avec $\gamma_{\mathbf{N}}(s) = \pi^{1/2-s}\Gamma(s/2)\Gamma((1-s)/2)$, et se factorise sur l'ensemble de ses zéros non triviaux

$$\zeta_{\mathbf{N}}(s) = \frac{\prod_\rho (1-s/\rho)e^{s/\rho}}{2\Gamma(1+s/2)(s-1)\pi^{-s/2}}.$$

Indépendamment vers 1915 ([14]), Hilbert et Polya suggérèrent d'interpréter les zéros $\{\rho\}$ comme valeurs propres d'un opérateur autoadjoint, mais nul n'a pu réaliser cet hypothétique opérateur.

Cette connaissance des singularités de la fonction ζ_M permet de préciser l'asymptotique (T_M) :

Corollaire 1.2 ([14]). — *Soit $r_0 = 1/2 > r_1 \geq \ldots \geq r_n$ la suite finie correspondant aux petites valeurs propres ($< 1/4$) du laplacien ($\lambda_{n+1} \geq 1/4$). On a*

$$\pi_M(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{li}(t^{1/2+r_i}) + O(t^{3/4}(\log t)^{-1/2}).$$

Remarque . — Les arbres homogènes et leurs quotients compacts présentent des phénomènes analogues aux espaces à courbure négative. Soit M un complexe simplicial unidimensionnel compact, homogène d'ordre q, d'ensemble de sommets S, de matrice d'incidence P (P est une matrice symétrique 0–1 à diagonale nulle et $p_{ss'} = 1$ si et seulement si les sommets s et s' sont les sommets d'une arête du complexe, la valence de chaque sommet étant q, chaque ligne de P a exactement q 1 et $\#S - q$ 0, P est une matrice de permissions au sens de 2.B). On munit M d'une métrique pour laquelle chaque arête est de longueur 1. On a alors le théorème dû à Ihara :

Théorème 1.4 ([13]). — *Soit M un complexe simplicial unidimensionnel homogène de valence q et de matrice d'incidence P. Alors, si $g = (q-1)\#M$,*

$$\zeta_M(s) = (1-e^{-2s})^{-2g}\det(1-Pe^{-s}+qe^{-2s})^{-1}.$$

où on notera la resemblance avec la factorisation de la fonction ζ de Selberg du théorème 1.1.

Dans le théorème précédent, si $s_1, s_2 \ldots, s_n, s_{n+1} = s_1$ est la suite des sommets sur la géodésique C, les sommets s_{i-1} et s_{i+1} sont toujours distincts, puisqu'on s'interdit des aller–et–retours. Si on envisage l'ensemble des cycles où de tels aller–et–retours sont licites, on obtient une formule simple pour la fonction ζ, qui est valable pour tout graphe orienté G de matrice d'incidence P :

PROPOSITION 1.5. — $\zeta_G(s) = \det(1 - e^{-s}P)^{-1}$

Cette fonction est identique à la fonction $\zeta_{\tau(P)}$ pour les points périodiques du décalage de type fini $\tau(P)$ induit par P (*cf.* 2.B). Sur la droite critique $\{\Re es = \rho(P)\}$ (où $\rho(P)$ est le rayon spectral de P), il y a une infinité de pôles $(\rho(P)+2i\pi\mathbf{Z})$: cela correspond à la non–ergodicité de la dynamique sur ce graphe, un moyen d'introduire de l'ergodicité est de donner aux arêtes des longueurs variables, de telle sorte que le sous–groupe engendré par ces longueurs soit dense dans $\mathbf{R}$ (*cf.* 3.6 et la dichotomie dans le théorème 3.7).

2. Dynamique symbolique

A. Dynamique sur un pantalon.

On considère un pantalon hyperbolique orienté M : c'est une surface à bord, homotopiquement équivalente à la sphère S^2 privée de trois points. On note B, B_a, B_b les trois composantes connexes (totalement géodésiques) de son bord ∂M et par a et b les segments géodésiques orientés (normaux à ∂M) d'origine sur B et d'extrémités sur B_a et B_b *resp.*, par $\overline{a}$ et $\overline{b}$ les mêmes segments avec l'orientation opposée et S l'ensemble des symboles $S = \{a, \overline{a}, b, \overline{b}\}$. Découpant la surface suivant a et b, on obtient un polygone géodésique simplement connexe, union de deux hexagones.

Soit Ω l'union des géodésiques de S qui restent indéfiniment (dans le passé et le futur) à l'intérieur de M.

Pour une telle géodésique pointée en un point $\xi = (m, \vec{v}) \in T_1^*M$, on note $\sigma_0\sigma_1\ldots(\sigma_{-1}\sigma_{-2}\ldots$ *resp.*) le mot (construit sur l'alphabet S) de ses intersections successives (dans le futur, *resp.* dans le passé strict) avec les segments $a, b, \overline{a}, \overline{b}$, où l'un de ces symboles indique une intersection orientée. Le mot est effectivement infini : une géodésique ne peut se recouper, ni spiraler dans un domaine hyperbolique simplement connexe tel un bi–hexagone. De plus, dans ces mots, les blocs $a\overline{a}, \overline{a}a, b\overline{b}, \overline{b}b$ sont proscrits, puisque qu'en courbure négative, les biangles hyperboliques sont interdits (d'après Gauß-Bonnet).

Notons par Σ la partie de $S^{\mathbf{Z}}$ contenant tous les mots permis, *i.e.* ceux qui ne contiennent aucun des 2–blocs énumérés précédemment comme sous–mots. Si τ note le décalage défini sur $S^{\mathbf{Z}}$ défini par $\tau(\sigma)_i = \sigma_{i+1}$, Σ est (τ, τ^{-1})–invariant.

L'espace des symboles permis Σ est une représentation dynamique du flot géodésique sur Ω au sens où l'application suivante, déduite de l'application *mot* de Ω sur Σ, est bijective :

$$\begin{aligned} \Omega/g_t &\longrightarrow \Sigma/\tau \\ [C] &\longrightarrow [(\sigma_i(C))_{i\in\mathbf{Z}}]. \end{aligned}$$

La partie Ω s'identifie à un fermé du fibré unitaire tangent T_1^*M. Par ailleurs, si s est un symbole de S,

$$T_s = \{\xi \in T_1^*M \cap \Omega, x \in s, (\vec{v}, s) \text{ avec orientation } \geq 0\}$$

est transverse au flot géodésique $g_{t|\Omega}$ et le symbole $(\sigma_i(\xi))$ de la géodésique pointée $C_\xi = (g_t(\xi))_{t\in\mathbf{R}}$ issue de ξ est la suite des intersections successives de C_ξ avec les quatre transversales $(T_s)_{s\in S}$ (en prenant, si ξ appartient à T, pour σ_0 la transversale contenant ξ). Il existe ainsi une application *temps de premier retour* t sur Ω (dont la restriction à toute géodésique de Ω est continue à droite) telle que $\sigma_1(\xi) = g_{t(\xi)}\sigma_0(\xi)$. Si $\pi : \Sigma \to \Omega$ désigne l'inverse à droite de l'application symbole telle que $\pi(\sigma) \in T_{\sigma_0}$, le temps de premier retour vérifie $g_{t(\sigma)}\pi = \pi\tau$.

Désignons par Σ^t l'espace $\Sigma \times \mathbf{R}/\sim$, où on a identifié les points (σ, s) et $(\tau\sigma, s - t(\sigma))$, espace appelé suspension de (Σ, τ)par t. Le flot par translation T_s sur $\mathbf{R}$ induit un flot (encore noté T_s) sur Σ^t, dont le lemme suivant énonce la principale propriété :

Lemme 2.1. — *L'application* Π *de* Σ^t *sur* Ω, *qui à tout point* $[(\sigma, s)]$ *associe le point* $g_s(\pi\sigma)$ *est bijective et entrelace les deux flots* (Σ^t, T_s) *et* (Ω, g_s).

Les suites périodiques [primitives] $\sigma = \dots pp \dots$ où p est un mot fini [non périodique], *i.e.* les points périodiques [primitifs] du décalage τ sur Σ, correspondent biunivoquement aux géodésiques [primitives] de Ω et la période $l(C)$ de la géodésique [primitive] correspondante est donnée par $l(C) = \sum_{m=0}^{j-1} t(\tau^m(\sigma))$ (qu'on notera par $t^j(\sigma)$, sans le confondre avec la composée j–ème de t qui n'a pas de sens) si σ est j-périodique.

Lemme 2.2. —

$$\zeta_\Omega(s) = \exp \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\sigma \text{ k–périodique}} e^{-st^k(\sigma)}, \Re e s > h.$$

Preuve. — On a

$$\begin{aligned}
\zeta_\Omega(s) &= \prod_{l\in\mathbf{L}} (1 - e^{-sl})^{-1} \\
&= \exp \sum_{l\in\mathbf{L}} \sum_{m\geq 1} \frac{e^{-sml}}{m} \\
&= \exp \sum_{[\sigma]} \sum_{m\geq 1} \frac{e^{-smt^{j(\sigma)}(\sigma)}}{m} \\
&= \exp \sum_{j\geq 1} \sum_{\sigma \text{ j–périodique primitif}} \sum_{m\geq 1} \frac{e^{-smt^j(\sigma)}}{mj} \\
&= \exp \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\sigma \text{ k–périodique}} e^{-st^k(\sigma)}
\end{aligned}$$

.

La seconde égalité est obtenue par le développement en série de $\log(1-u)$, dans la troisième, la somme en $[\sigma]$ porte sur un ensemble de représentants des orbites périodiques primitives du décalage τ. $\square$

L'objet central de la troisième partie sera la fonction ζ_Σ^t du membre de gauche dans le lemme précédent (similaire à la fonction génératrice associée aux points périodiques d'une transformation Φ introduite dans l'introduction). La dynamique symbolique, que nous avons pu réaliser explicitement dans le cas du pantalon (du moins pour la partie Ω), est d'une construction considérablement plus ardue dans le cas de flots géodésiques sur une variété compacte (que la courbure soit constante ou non) : il n'existe pas de transversales T évidentes. Néanmoins, après avoir précisé la notion de décalage de type fini, nous verrons que des résultats de Bowen nous permettent en toute généralité de ramener l'étude des fonctions ζ_M à celles du type ζ_Σ^t.

B. Décalages de type fini ([6]).

Nous allons d'abord préciser en détail ce qu'on entend par un (sous–)décalage de type fini. Soit S un alphabet fini, *i.e.* un ensemble fini de symboles. Si M est un k–mot fini construit sur l'alphabet S, Σ_M notera l'ensemble des mots de $S^{\mathbf{Z}}$ qui ne contiennent pas M comme sous–mot de longueur k. Toute intersection finie $\Sigma_{M_1,\ldots,M_m} = \cap_{i=1}^m \Sigma_{M_i}$ est (τ,τ^{-1})–invariante : une telle partie (munie implicitement du décalage τ) est appelée décalage de type fini.

On a une présentation de ces sous–décalages en terme de matrice de permissions (ou matrice d'interdits). Soit S un alphabet fini et P une matrice à coefficients 0 ou 1 indexés par $S\times S$. La partie Σ_P de $S^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$\{(\omega_i)\in S^{\mathbf{Z}}, P_{\omega_i\omega_{i+1}}=1\},$$

(τ,τ^{-1})–invariante, est appelée décalage de matrice de permissions P (ou de matrice d'interdits $I=(1-p_{st})$).

On plonge naturellement $\Sigma = S^{\mathbf{Z}}$ dans l'espace $\Sigma(K)=S(K)^{\mathbf{Z}}$ des mots infinis basés sur l'alphabet $S(K)=S^K$ (alphabet des K–mots de S) : le n–ème symbole de $i(K)(\sigma)$ est le K–mot contenu dans σ commencant à la n–ème lettre de σ. Σ s'identifie alors au sous–décalage de $\Sigma(K)$ de matrice d'interdits $I(K)=(I(K)_{\mu\nu}=\prod_{j=1}^{K-1}\delta_{\mu_{j+1}\nu_j})$, $(\mu,\nu\in S(K))$.

Soit K la longueur maximale des mots $(M_1,\ldots,M_m)$, I_M^K la fonction définie sur S^K valant 0 sur les mots contenant M comme sous–mot et 1 sinon. $\Sigma_{M_1,\ldots,M_n}$ se plonge dans $\Sigma(K)$, comme le sous–décalage de matrice d'interdits $I=\left(I(K)_{\mu,\nu}\prod_{i=1}^m I_{M_i}^K(\mu)I_{M_i}^K(\nu)\right)$.

Le décalage plein sur l'alphabet S (mentionné dans l'introduction) correspond au décalage ayant comme matrice d'interdits la matrice nulle d'ordre $\#S$, alors que le décalage associé au pantalon P de la partie précédente a pour matrice de permissions la matrice d'ordre 4 $\begin{pmatrix} 1_2 & d_2 \\ d_2 & 1_2 \end{pmatrix}$ (avec 1_2 matrice identié et d_2

matrice du décalage plein sur deux éléments).

La matrice de permissions permet de définir un graphe orienté G (avec ensemble de sommets S) et d'interpréter ainsi les mots du sous–décalage comme les chemins infinis sur le graphe G (*cf.* 1. et [2]).

C. Cas général. — Contentons–nous de citer le résultat suivant dû à Bowen, valable en particulier pour les flots géodésiques sur les variété compactes à courbure négative :

Théorème 2.3([4]). — *Soit (φ_t) un flot de type A sur une variété compacte V. Il existe un ensemble fini S de transversales au flot φ, un sous–décalage de type fini Σ construit sur l'alphabet S, une application temps de premier retour t sur Σ et une projection Π de la suspension Σ^t de Σ par t sur V qui entrelace le flot par translation sur Σ^t et le flot φ sur V.*

En général la projection Π n'est pas bijective, bien qu'elle le soit presque partout et que ses fibres soient de cardinal uniformémenr majoré. Cette situation est analogue au celle d'un difféomorphisme Φ de type A, pour laquelle, en construisant une partition S finie (dite de Markov), Bowen exhibe le difféomorphisme Φ comme facteur d'un sous–décalage de type fini, avec une projection presque bijective. Manning ([15]) réussit dans ce cadre, en introduisant des sous–décalages construits sur les k–intersections des atomes de la partition de Markov, à compter les points fixes périodiques de Φ comme somme (alternée) des points fixes de ces sous–décalages, dont Φ est un facteur.

De manière analogue, en introduisant des sous–décalages $(\Sigma_i)_{i=1,\dots,n}$, d'entropie strictement inférieure à l'entropie h de φ (égale à celle du flot par translations sur Σ^t noté $\Sigma_0^{t_0}$) et munis d'une application temps de premier retour t_i, Bowen parvient à compter les géodésiques du flot φ en terme de ces sous–décalages de telle sorte que

$$\zeta_V = \prod_{i=0}^{n} \zeta_{\Sigma_i^{t_i}}^{(-1)^{i+1}}.$$

Les fonctions $\zeta_{\Sigma_i^{t_i}}$ étant convergentes sur un voisinage de $\{\Re es \geq h\}$, l'étude de la fontion ζ_V au voisinage de la droite critique $\Re es = h$ se réduit à celle de la fonction ζ_{Σ^t}.

3. Fonction ζ pour des suspensions

Soit (Σ, τ) un sous–décalage de type fini, t une fonction réelle continue positive sur Σ et ζ_Σ^t le fonction définie par

$$\zeta_\Sigma^t(s) = \exp \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\sigma \in \mathrm{Fix}\, \tau^k} e^{-st^k(\sigma)}.$$

Remarquons que, pour la fonction t constante, ζ^t_Σ est constante égale à $\zeta_\Phi(e^{-st})$ introduite dans l'introduction pour la transformation $\Phi(=\tau)$.

A. Réduction aux décalages amnésiques. — L'étude des propriétés de prolongement méromorphe de ζ^t_Σ demande des hypothèses de régularité sur la fonction t, relativement à une métrique sur Σ.

La topologie produit sur $S^{\mathbf{Z}}$ est induite par la métrique d_θ, définie par

$$d_\theta(\sigma,\omega) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \theta^{|n|}(1-\delta_{\sigma_n\omega_n}),$$

où θ est un nombre quelconque de l'intervalle $(0,1)$. Remarquons que la distance d_θ est équivalente à la distance (ultramétrique) D_θ définie par $D_\theta(\sigma,\omega)=\theta^k(\sigma\neq\omega)$ où k est le plus grand entier positif tel que $\sigma_n=\omega_n, n\le|k|$. On notera par $\mathcal{F}_\theta(\Sigma)$ l'espace des fonctions d_θ–lipchitziennes sur Σ, à valeurs réelles, qui muni de la norme

$$||f||_\theta = \sup_\sigma |f(\sigma)| + \sup_{\sigma\neq\omega} \frac{|f(\sigma)-f(\omega)|}{d_\theta(\sigma,\omega)},$$

est un espace de Banach.

Les fonctions t et T, définies sur (Σ,τ), sont dites cohomologues s'il existe une fonction u telle que $T=t+u\circ\tau-u$. Deux fonctions t,T cohomologues induisent des fonctions ζ identiques : $\zeta^t_\Sigma=\zeta^T_\Sigma$. (Si t et T sont toutes deux positives, les flots par translation sur Σ^t_τ et Σ^T_τ sont conjugués.)

On dit qu'une fonction f sur Σ ne dépend que du futur si $f(\sigma)=f(\omega)$ pour tout σ,ω coïncidant sur le futur : $\sigma_i=\omega_i, i\ge 0$. On a alors le lemme :

Lemme 3.1([5]). — *Toute fonction t de $\mathcal{F}_\theta(\Sigma)$ est cohomologue à une fonction f de $\mathcal{F}_{\theta/2}$ ne dépendant que du futur, la fonction réalisant le cobord étant dans $\mathcal{F}_{\theta/2}$.*

Si t est strictement positive, on peut prendre f strictement positive : il suffit de remplacer le $f(=t+u\circ\tau-u)$ du lemme par $F=t^l/l+(u\circ\tau^l-u)/l=f^l/l$, fonction qui ne dépend que du futur, cohomologue à t et strictement positive pour l assez grand.

Notons par Σ^+ la trace de Σ sur les mots du futur $S^{\mathbf{N}}$, *i.e.*

$$\Sigma^+ = \{\sigma^+\in S^{\mathbf{N}}, \exists\sigma\in\Sigma, \sigma_n=\sigma^+_n, n\ge 0\},$$

et par τ le décalage induit sur Σ^+ (qui n'est plus un homéomorphisme). Néanmoins il y a correspondance biunivoque entre les points périodiques de $\tau_{|\Sigma^+}$ et ceux de $\tau_{|\Sigma}$, et donc on a

$$\zeta^f_{\Sigma^+}=\zeta^t_\Sigma$$

où f est une fonction ne dépendant que du futur cohomologue à t.

B. Entropie d'une suspension et pression.

Soit dl la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{M}_1^\tau(\Sigma)$ ($\mathcal{M}_1^{T_s}(\Sigma^t)$) le convexe des mesures de probabilité τ–invariantes ((T_s)–invariantes *resp.*). Si μ est une mesure de $\mathcal{M}_1^\tau(\Sigma)$, la mesure produit $\mu \otimes dl / \int_\Sigma t d\mu$ induit une mesure $\tilde{\mu}$ de $\mathcal{M}_1^{T_s}(\Sigma^t)$ et toute mesure (T_s)–invariante est de cette forme (en la désintégrant le long du flot). ABRAMOV ([1]) exprime l'entropie mesurée du flot (T_s) relativement à $\tilde{\mu}$ en fonction de celle de μ :

$$h_{\tilde{\mu}}(T_s) = \frac{h_\mu(\tau)}{\int_\Sigma t d\mu}$$

et par suite, d'après la caractérisation variationnelle de l'entropie topologique en terme d'entropie mesurée :

$$h(T_s) = \sup_{\tilde{\mu}} h_{\tilde{\mu}}(T_s) = \sup_\mu \frac{h_\mu(\tau)}{\int_\Sigma t d\mu}$$

Si g est une fonction sur Σ, la pression $\mathcal{P}(g)$ est définie par

$$\mathcal{P}(g) = \sup_\mu \big(h_\mu(\tau) + \int_\Sigma g d\mu\big).$$

Ainsi l'entropie h du flot (T_s) sur Σ^t est caractérisée par $\mathcal{P}(-ht) = 0$.

La définition précédente de la pression est en fait sa caractérisation variationnelle et elle est plutôt définie en terme de familles séparantes/recouvrantes ou de recouvrements ouverts à la manière de l'entropie topologique (remarquons que l'entropie n'est que la pression de la fonction nulle). Précisément, soit $d_{\varepsilon,n,\tau}(\omega,\sigma) = \sup_{0\le i<n} d(\tau^i\sigma, \tau^i\omega)$, $\mathcal{S}(\varepsilon,n,\tau)$ ($\mathcal{R}(\varepsilon,n,\tau)$ *resp.*) l'ensemble des familles finies $d_{\varepsilon,n,\tau}$–séparantes (recouvrantes *resp.*). Alors les deux définitions suivantes de la pression sont équivalentes à la précédente :

$$\mathcal{P}(g) = \sup_\varepsilon \limsup_n \frac{\log \sup_{S\in\mathcal{S}(\varepsilon,n,\tau)} \sum_{\sigma\in S} e^{g^n(\sigma)}}{n}$$
$$\mathcal{P}(g) = \sup_\varepsilon \liminf_n \frac{\log \inf_{R\in\mathcal{R}(\varepsilon,n,\tau)} \sum_{\sigma\in R} e^{g^n(\sigma)}}{n}$$

A la relation (T_M) correspond pour les transformations expansives la relation analogue pour la pression (et donc en particulier pour l'entropie $\mathcal{P}(0)$) en termes des points périodiques de τ ([26]) :

$$\mathcal{P}(g) = \limsup_n \frac{\log \sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}\,\tau^n} e^{g^n(\sigma)}}{n} \qquad (\mathcal{P})$$

C. Opérateur de Ruelle.

La série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}\,\tau^k} e^{-sf^k(\sigma)}$ est convergente dès que

$$\mathcal{P}(-sf)=\limsup_k \frac{\log \sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}\,\tau^k} e^{-sf^k(\sigma)}}{k}<1.$$

Rappelons que l'entropie mesure le cardinal asymptotique (renormalisé) des familles de k–orbites pour une transformation Φ, de $[0,t]$–orbites dans le cas d'un flot (φ_t). Les formules de Bowen–Ruelle $(T_M,\mathcal{P})$ indiquent qu'il suffit de considérer la famille des orbites périodiques de longueur inférieure à T (en fait Bowen montre qu'il suffit de prendre, pour $\alpha>0$ quelconque, la famille des orbites périodiques primitive de période dans $(T-\alpha,T+\alpha)$). Il est alors naturel de considérer (comme Misuriewicz–Przytycki ([18]) le pratiquent pour établir leur minoration de l'entropie par le logarithme du degré pour une transformation C^1 d'une variété compacte orientée) la famille des k–orbites de Σ^+ d'extrémité finale σ et de comparer à la pression $\mathcal{P}(-sf)$ les quantités

$$\limsup_k \frac{\log \sum_{\omega\in\tau^{-k}(\sigma)} e^{-sf^k(\omega)}}{k} \qquad (*).$$

Si $\mathcal{L}_F$ note l'opérateur (dit de *Ruelle*) opérant sur les fonctions sur Σ et défini par $\mathcal{L}_F g(\sigma)=\sum_{\omega\in\tau^{-1}(\sigma)} e^{F(\omega)}g(\omega)$, $\mathcal{L}_F$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{F}_\theta$ pour $F\in\mathcal{F}_\varphi(\varphi\leq\theta)$ et $(*)$ se réécrit, pour $F=-sf$ et si $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur Σ^+,

$$\limsup_k \frac{\log \mathcal{L}_F^k(\mathbf{1})(\sigma)}{k} \qquad (*).$$

majoré par le logarithme du rayon spectral

$$\rho(\mathcal{L}_F)=\limsup_k ||\mathcal{L}_F^k||_\theta^{1/k}.$$

L'opérateur $\mathcal{L}_F$ est un opérateur type Perron–Frobenius : Si Σ^+ était de cardinal fini, $\mathcal{L}_F$ serait représenté par une matrice à coefficients positifs pour lesquels on a le théorème :

Théorème 3.2 (Perron–Frobenius [10]). — *Soit A une matrice à coefficients positifs telle que A^k soit à coefficients non nuls pour k suffisamment grand. Alors le rayon spectral $\rho(A)$ est valeur propre simple de A, avec un vecteur propre à coordonnées positives non nulles et les autres valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$.*

et ce théorème est généralisé aux opérateurs $\mathcal{L}_F$ par Ruelle :

THéorème 3.3 ([26]). — *Pour F dans $\mathcal{F}_\theta$, l'opérateur $\mathcal{L}_F$ a $e^{\mathcal{P}(F)}$ comme valeur propre simple isolée avec un vecteur propre positif. Le reste du spectre est inclus dans le disque ouvert de rayon $e^{\mathcal{P}(F)}-\varepsilon(\varepsilon>0)$.*

Il est une hypothèse (qui n'est pas remplie pour les suspensions provenant des flots géodésiques…) qui simplifie grandement la situation : la fonction f (continue) est localement constante. Σ^+ étant totalement dicontinu, cela signifie que f ne dépend que des N premières coordonnées des mots de Σ^+ (f sera dite alors de détermination finie). Plongeant le sous–décalage Σ^+ dans le décalage construit sur l'alphabet $S(N)$ comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2.B, on peut supposer que f ne dépend que de la première coordonnée, *i.e.* f est constante sur chacun des atomes de la partition fondamentale $\mathcal{A} = (A_{\tilde{s}} = \{\sigma \in \Sigma^+, \sigma_0 = \tilde{s}\}, \tilde{s} \in S)$ de Σ^+. Si V est le sous espace (de dimension finie) des fonctions $\mathcal{A}$–mesurables, on vérifie facilement que V est $\mathcal{L}_{-sf}$–invariant, avec la matrice de $\mathcal{L}_{-sf|V}$ de la forme $\left(P_{\tilde{s}\tilde{s}'}e^{-sf(\tilde{s}')}\right)$ si $P_{\tilde{s}\tilde{s}'}$ note la matrice de permissions du décalage τ. De plus, le lecteur vérifiera aisément que

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Fix}\, \tau^k} e^{-sf^k(\sigma)} = \mathrm{tr}\left(\mathcal{L}_{-sf|V}\right)^k,$$

ce qui donne

$$\zeta^f_{\Sigma^+}(s) = \det(1 - \mathcal{L}_{-sf|V})^{-1}.$$

Lemme 3.4. — *Soit P^s la matrice $\left(P_{\tilde{s}\tilde{s}'}e^{-sf(\tilde{s}')}\right)$. Le rayon spectral $\rho(P^s)$ est strictement décroissant.*

On a $\rho(P^h) = 1$, ce qui redonne l'holomorphie de la fonction $\zeta^f_{\Sigma^+}$ sur $\{s > h\}$ et, vu $d\rho(P^s)/ds(h) \neq 0$, on a le corollaire :

Corollaire 3.5. — *$\zeta^f_{\Sigma^+}(s)$ est méromorphe au voisinage de $s = h$ avec un pôle simple en $s = h$.*

Preuve du lemme. — Soit s dans un voisinage de s_0 donné. D'après Perron–Frobenius, la plus grande valeur propre λ^s de P^s (qui coïncide avec le rayon spectral $\rho(P^s)$) est simple. Soit v^s (μ^s *resp.*) un vecteur propre de P^s (de la transposée P^{s*} *resp.*) associé à la valeur propre λ^s, μ^s étant normalisé suivant $< \mu^s, v^{s_0} >= 1$. Perron–Frobenius nous permet de prendre les coefficients de v^s et μ^s positifs non nuls.

Les éléments propres (λ^s, μ^s) dépendent analytiquement de s et on a

$$\dot{P^{s*}}\mu^s + P^{s*}\dot{\mu^s} = \dot{\lambda^s}\mu^s + \lambda^s\dot{\mu^s}$$

d'où, en utilisant la normalisation pour μ^s,

$$\dot{\lambda^{s_0}} = \dot{\lambda^{s_0}} < \mu^{s_0}, v^{s_0} >=< \mu^{s_0}, \dot{P^{s_0}}v^{s_0} > .$$

La dérivée $\dot{P^{s_0}}$ est une somme de termes négatifs, ce qui permet de conclure. □

Si f est constante ($\equiv t > 0$), alors $\zeta_t(s) = \det(1 - P_\tau e^{-st})^{-1}$ où P_τ est la matrice de permissions du décalage τ. Ainsi, sur la droite critique $\{\Re es = h\}$, la fonction ζ_τ a comme ensembles de pôle $h + 2i\pi\mathbf{Z}/t$. Dans ce cas, le flot (T_s)

n'est pas (topologiquement) mélangeant (au contraire de nos flots géodésiques) : l'application $(\sigma, s) \in \Sigma^t \to e^{2i\pi/ts}$ est fonction propre (de fréquence $2\pi/t$). Parry–Tuncel caractérisent les suspensions non mélangeantes de τ par des applications localement constantes :

Théorème 3.6 ([21]). — *Soit f à détermination finie. Le flot (T_s) sur Σ_+^f est non mélangeant, de fréquence a, si et seulement si $af/2\pi$ est cohomologue à une fonction continue à valeurs entières.*

On obtient ainsi le résultat complet :

Théorème 3.7 ([20]). — *Soit $f > 0$ à détermination finie. La fonction $\zeta_{\Sigma_+}^f$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.*

Si (T_s) est mélangeant sur Σ_+^f, il existe un voisinage de $\{\Re es > h\}$ sur lequel ζ_τ^f est analytique sauf pour le pôle $s = h$.

Si (T_s) n'est pas mélangeant, il existe $t_0 > 0, \varepsilon > 0$ tels que ζ_τ^f soit périodique de période it_0 et analytique sur $\{\Re es > h - \varepsilon\}$, excepté sur $h + it_0\mathbf{Z}$ ensemble de pôles simples.

Remarque . — Si f ne dépend que des deux premières coordonnées, Σ_+ peut s'interpréter comme l'espace des chemins (mesurés par leur "abscisse curviligne") de $\mathbf{R}^+$ dans un graphe orienté G de matrice d'adjacence $(P_{\tilde{s}\tilde{s}'})$ et dont les arêtes $\tilde{s} \to \tilde{s}'$ sont de longueur $f(\tilde{s}, \tilde{s}')$. La fonction $\zeta_{\Sigma_+}^f$ coïncide avec la fonction ζ_G associée au graphe G (*cf.* fin de la première partie).

Dans le cas général (f non localement constante), on a le résultat dû a Pollicott :

Théorème 3.8 ([24]). — *Soit $K_\theta^h = \log\theta/(\log\theta + h)$ et la fonction η_Σ définie par $\eta_\Sigma(f) = \exp - \sum_{m\geq 1} 1/m \sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}\,\tau^m} e^{f^m(\sigma)}$. La fonction η_Σ admet un prolongement méromorphe au domaine $\{\mathcal{P}(\Re e(f)) < K_\theta^h\}$.*

Preuve (Indications). — L'opérateur $\mathcal{L}_f$, pour f dans $\mathcal{F}_\theta$, n'est pas un opérateur à trace de $\mathcal{F}_\theta$: si $\rho_f = e^{\mathcal{P}(\Re e f)}$, son spectre est l'union de son spectre essentiel égal au disque $\{|z| \leq \theta\rho_f\}$ et d'un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicité finie dans la couronne $\{\theta\rho_f < |z| \leq \rho_f\}$ (l'opérateur $\mathcal{L}_f$ n'est pas autoadjoint, la valeur propre $\lambda_i(f)$ a comme multiplicité la dimension des noyaux itérés $\cup_j \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_f - \lambda_i(f))^j$).

Au contraire du cas des fonctions localement constantes, on n'a pas de relation du genre $\mathrm{tr}(\mathcal{L}_f)^m = \sum_{\sigma\in\mathrm{Fix}\,\tau^m} e^{f^m(\sigma)}$. Néanmoins, si $(\lambda_i(g))$ note la suite des valeurs propres isolées (répétées suivant leurs multiplicité) de $\mathcal{L}_g$ (qui varient analytiquement avec g dans un voisinage de f), on peut, en approchant g par un

$\tilde g$ localement constant, obtenir une majoration du type

$$\limsup_k \Big| \sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}\,\tau^k} e^{g^k(\sigma)} - \sum_i \lambda_i(g)^k \Big|^{1/k} < \beta < 1$$

uniformément sur le voisinage de f introduit dans le théorème. Ainsi

$$\eta_\Sigma(g) = \exp - \sum_{k\geq 1} 1/k \Big[\sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}\,\tau^k} e^{f^k(\sigma)} - \sum_i \lambda_i(g)^k \Big] \prod_i (1-\lambda_i(g))$$

est–elle analytique. □

Soit α_θ^h tel que $\mathcal{P}(-\alpha_\theta^h f) = K_\theta^h$, dont l'existence est assurée par la décroissance de $t \to \mathcal{P}(-tf)$ (avec $\lim_{t\to-\infty} \mathcal{P}(-tf) = -\infty$)

Corolaire 3.9. — *Soit f de classe $\mathcal{F}_\theta(\Sigma^+)$. La fonction $\zeta^f_{\Sigma^+}(s)$ admet un prolongement méromorphe à la région $\{\Re es > \alpha_\theta^h\}$.*

Références

[1] Abramov L.. — *On the entropy of a flow*, A. M. S. Translations **49** (1966), 167–170.

[2] Adachi T., Sunada T.. — *Twisted Perron–Frobenius theorem and L–functions.* , J. Func. Anal. **71** (1987), 1–46.

[3] Bowen R.. — *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **94** (1972), 1–30.

[4] Bowen R.. — *Symbolic dynamics for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **95** (1973), 429–460.

[5] Bowen R.. — *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture notes in Math. **470**, 1975.

[6] Bowen R., Lanford III O.. — *Zeta functions of restrictions of the shift map*, Proc. Symp. in Pure Math. **14** (1970), 43–49.

[7] Eberlein P.. — *When a geodesic flow is of Anosov type, I ,II*, J. Differential Geo. **8** (1973), 437–463,565–577.

[8] Ellison W., Mendès France M.. — *Les nombres premiers*, Hermann, 1975.

[9] Gallovotti A.. — *Zeta functions and basic sets*, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. **61** (1976), 309–317.

[10] Gantmacher F.. — *Applications of the theory of matrices*, Interscience, New–York, 1959.

[11] Ghys E.. — *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. École Normale Sup. **20** (1987), 251–270.

[12] Guillopé L.. — *Sur la distribution des longueurs des géodésiques fermées d'une surface compacte à bord totalement géodésique*, Duke Math. J. **53** (1986), 827–848.

[13] Ihara Y.. — *On discrete subgroups of the two–by–two projective linear group over p–adic fields*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219–235.

[14] Hejhal D.. — *The Selberg trace formula and the Riemann zeta function*, Duke Math. J. **43** (1976), 441–482.

[15] Manning A.. — *Axiom A diffeomorphisms have rational zeta function*, Bull. London Math. Soc. **3** (1971), 215–220.

[16] MANNING A.. — *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. Math. **110** (1979), 567–573.

[17] MARGULIS G.. — *Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature*, F. Anal. and Appl. **3** (1969), 335–336.

[18] MISIUREWICZ M., PRZYTYCKI F.. — *Topological entropy and degree of smooth mappings*, **25** (1977), 573–574.

[19] MORSE M.. — *La dynamique symbolique*, Bull. Soc. Math. France **67** (1939), 1–7.

[20] PARRY W., POLLICOTT M.. — *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of axiom A flows*, Ann. Math. **118** (1983), 573–591.

[21] PARRY W., TUNCEL S.. — *Classifiactions problems in ergodic theory*, L. M. S. Lecture notes **67**, C. U. P. Cambridge Angleterre, 1982.

[22] POLLICOTT M.. — *A complex Ruelle operator theorem and two counter examples*, Ergodic Theory Dynamical Systems **4** (1984), 135–146.

[23] POLLICOTT M.. — *Asymptotic distribution of closed geodesics*, Israel J. Math. **52** (1985), 209–224.

[24] POLLICOTT M.. — *Meromorphic extensions of generalized zeta functions*, Inv. Math. **85** (1986), 147–164.

[25] RUELLE D.. — *Zeta functions for expanding maps and Anosov flows*, Inv. Math. **34** (1976), 231–242.

[26] RUELLE D.. — *Thermodynamic formalism*, Addison–Wesley, Reading, 1978.

[27] SARNAK P.. — *Determinants of laplacians*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 113–120.

[28] SELBERG A.. — *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.

[29] SINAI Y.. — *The asymptotic behavior of the number of closed geodesics on a compact manifold of negative curvature*, A. M. S. Translations **73** (1968), 227–251.

[30] SMALE S.. — *Differentiable dynamical systems*, Bull. A. M. S. **73** (1967), 747–817.

[31] TCHEBICHEV. — *Mémoire sur les nombres premiers*, J. de Math. **17** (1852), 366–390.

[32] VOROS A.. — *Analyse semi–classique de la formule des traces de Selberg*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble Chambéry **5** (1987), 57–66.