
JFM 68.0505.04

Eckmann, B.

Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen. (German)

Comment. math. Helvetici 14, 234-256.

Published: **1942**

Im ersten Teil untersucht Verf. die Hurewiczschen Homotopiegruppen der Räume, in welchen eine stetige Multiplikation erklärt ist; das heißt: jedem geordneten Punktepaar $(a,\, b)$ ist als Produkt ein Punkt $a \cdot b$ desselben Raumes zugeordnet, der stetig vom Paar $(a,\, b)$ abhängt (die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes wird also nicht gefordert). Ein solcher Raum soll $\varGamma$-Raum heißen. Gibt es bezüglich der Multiplikation ein Einselement $e(a \cdot e = e \cdot a = a)$, dann wird der Raum $\varGamma_e$-Raum genannt. In diesem Fall wird gelegentlich auch angenommen, daß "das Inverse existiert", d. h. daß es zu jedem Punkt a einen Punkt a^{-1} mit $a{\cdot}a^{-1} = e$ gibt, der von a stetig abhängt. (Jeder Gruppenraum ist ein $\varGamma_e$-Raum mit Inversem.) Es seien R ein $\varGamma$-Raum, X ein Kompaktum, $f(x)$ und $g(x)$ zwei stetige Abbildungen von X in R, f (und g) die Klasse homotoper Abbildungen von X in R, die $f(x)$ (und $g(x)$) enthält; dann soll $f \cdot g$ die Klasse bezeichnen, die $f(x) \cdot g(x)$ enthält. $\pi_n(R)$ sei die n-te Homotopiegruppe von R, und für $f,\, g \in \pi_n(R)$ bedeute $f + g$ die nach Hurewiczscher Vorschrift auszuführende Addition der Homotopieklassen.

Satz I: R sei ein $\varGamma$-Raum; für $f_i,\, g_i \in \pi_n(R)$, $i = 1,\, 2$, gilt bei beliebigem $n : (f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2)$.

Satz II: R sei ein $\varGamma_e$-Raum; für $f,\, g \in \pi_n(R)$ gilt bei beliebigem $n : f \cdot g = f + g$.

(In einem $\varGamma_e$-Raum fällt also die Multiplikation $f \cdot g$ der Homotopieklassen mit der Hurewiczschen Addition zusammen und ist somit von selbst assoziativ.) In einem $\varGamma_e$-Raum wird die Potenz a^k durch $a^0 = e$, $a^k = a \cdot a^{k-1}$ definiert.

Satz III: R sei ein $\varGamma_e$-Raum; für $f \in \pi_n(R)$ gilt bei beliebigem $n : f^k = kf$ für alle ganzen Zahlen $k \geqq 0$ und, wenn das Inverse existiert, auch für $k < 0$.

Salz IV: R sei ein $\varGamma_e$-Raum; S^n sei die n-dimensionale Sphäre; für $f,\, g \in \pi_n(R)$, $h \in \pi_r(S^n)$ gilt bei beliebigem n und r: $(f + g)h = fh + gh$, also auch $(-f)h = -(fh)$. (Übrigens gilt immer $f(g + h) = fg + fh$.)

Im zweiten Teil wendet Verf. diese Ergebnisse an auf den Fall einer m-dimensionalen Sphäre S^m, die $\varGamma_e$-Raum ist. (Solche sind S^3 und S^7.) T_k bezeichnet eine Abbildung der S^m in sich vom Grade k.

Satz V: S^m sei ein $\varGamma_e$-Raum; dann gilt für $f \in \pi_n(S^m)$ bei beliebigem n und $k : T_k f = kf$.

Satz VI: Es gilt $T_k f = kf$ für $f \in \pi_{r+d}(S^r)$ mit $d \leqq 7$, $r > d + 1$ (und mit $d \leqq 7$, $r = d + 1$, $y(f) = 0$, wo γ die Hopfsche Invariante bedeute). *Corollar*: Es gilt $T_2 f = 0$ für $f \in \pi_{r+1}(S^r)$, $r \geqq 3$. (Dagegen ist $T_{-1} f = f$ für $f \in \pi_n(S^2)$, $n \geqq 3$.)

Im dritten Teil bestimmt Verf. die dritte, vierte und fünfte Homotopiegruppe r orthogonalen Gruppen unter Verwendung einer früheren Arbeit (Comment. math. Helvetici 15 (1942), 1-26; F. d. M. 68). $\varGamma_n$ bedeute die Gruppe aller orthogonalen $(n+1)$-reihigen Matrizen mit der Determinante $+1$, $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}_2$ die Restklassengruppe von $\mathfrak{G}$ mod 2 ($\approx$ bedeutet isomorph).

Satz VII: Für $n \geqq 4$ ist $\pi_3(\varGamma_n) \approx \mathfrak{G}$, für $n \geqq 5$ ist $\pi_4(\varGamma_n) = 0$, für $n \geqq 6$ ist $\pi_5(\varGamma_n) = 0$,

$\pi_3(\mathit{\Gamma}_2) \approx \mathfrak{G}$, $\pi_3(\mathit{\Gamma}_3) \approx \mathfrak{G} + \mathfrak{G}$, $\pi_4(\mathit{\Gamma}_2) \approx \mathfrak{G}_2$, $\pi_4(\mathit{\Gamma}_3) \approx \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2$, $\pi_4(\mathit{\Gamma}_4) \approx \mathfrak{G}_2$, $\pi_5(\mathit{\Gamma}_2) \approx \mathfrak{G}_2$, $\pi_5(\mathit{\Gamma}_2) = 0$, $\pi_5(\mathit{\Gamma}_3) = 0$, $\pi_5(\mathit{\Gamma}_4) = 0$, $\pi_5(\mathit{\Gamma}_5) \approx \mathfrak{G}$.

Leray, J.; Prof. (Paris)
Cited in ...