
JFM 68.0506.01

Whitehead, G. W.

Homotopy properties of the real orthogonal groups. (English)

Ann. Math., Princeton, (2) 43, 132-146.

Published: **1942**

Verf. bestimmt die i-te Homotopiegruppe $\pi_i(R_n)$ der Drehungsgruppe R_n der n-dimensionalen Sphäre S_n und die erzeugenden Elemente dieser Gruppe, wenn $i = 1, \dots, 5$. G bezeichne die Gruppe der ganzen Zahlen und G_2 ihre Restklassengruppe mod 2; es gilt $\pi_1(R_1) \cong G$; $\pi_1(R_n) \cong G_2$ für $n > 1$; $\pi_2(R_n) \cong 0$; $\pi_3(R_1) \cong 0$; $\pi_3(R_n) \cong G$ für $n = 2$ und $n > 3$; $\pi_3(R_3) \cong G + G$; $\pi_4(R_n) \cong 0$ für $n = 1$ und $n > 4$; $\pi_4(R_2) \cong \pi_4(R_4) \cong G_2$; $\pi_4(R_3) \cong G_2 + G_2$, $\pi_5(R_n) \cong 0$ für $n \neq 5$; $\pi_5(R_5) \cong G$. Verf. wendet seine Ergebnisse an auf die k-Felder der Sphären (ein k-Feld ist ein System von k tangentialen, stetigen, singularitätenfreien Richtungsfeldern, derart, daß in jedem Punkt diese k Richtungen paarweise orthogonal sind): Auf den Sphären S^{4p+3} gibt es ein 3-Feld; auf S^{8p+7} ein 7-Feld; auf S^{4p+1} aber kein 2-Feld. Alle diese Ergebnisse hat *Eckmann* mit etwas anderen Beweisen gleichzeitig veröffentlicht (in der vorstehend besprochenen und der dort erwähnten Arbeit). Die Hauptpunkte des Beweises sind folgende: Es werden eine “Projektion” π von R_n auf S^n und eine “kanonische Abbildung” C_n von S^n auf R_n eingeführt. Je nachdem n gerade oder ungerade ist, hat πC_n den Abbildungsgrad 0 oder 2. Die vier folgenden Bedingungen sind gleichwertig: Es gibt eine solche Abbildung F von S^n auf R^n, daß πF den Abbildungsgrad 1 hat; $R_n = R_{n-1} \times S^n$; der natürliche Homomorphismus von $\pi_{n-1}(R_{n-1})$ auf $\pi_{n-1}(R_n)$ ist ein Isomorphismus; C_{n-1} ist nullhomotop. Wenn $n = 4p + 1$ (und wenn $n = 2p$), sind diese vier Bedingungen nicht erfüllt. Außerdem werden Sätze von W. Hurewicz, Steenrod, H. Hopf, Pontrjagin und Freudenthal angewandt.

Leray, J.; Prof. (Paris)

Cited in ...