# Recensions publiées par Jean Leray

## dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*

66.1355.051940
**Whitehead, J. H. C.**
*On the homotopy type of manifolds.*
Ann. Math., Princeton, (2) 41, 825-832. (1940)
Es wird eine Klasse $\Pi$ von Mannigfaltigkeiten mit folgender Eigenschaft gegeben : wenn $M_1^n$ und $M_2^n$ der Klasse $\Pi$ angehören und $M_1^n$ und $M_2^n$ denselben Kern besitzen (z. B. wenn $M_1^n$ und $M_2^n$ demselben Homotopietypus angehören), dann sind die topologischen Produkte $M_1^n \times A^k$ und $M_2^n \times A^k$ kombinatorisch äquivalent, wenn $A^k$ ein Simplex von genügend großer Dimension ist. Ist z. B. die Mannigfaltigkeit $M^n \in \Pi$ einfach zusammenhängend, und sind alle ihre Bettischen Gruppen positiver Dimension null, dann sind $M^n \times A^{n+5}$ und $A^{2n+5}$ kombinatorisch äquivalent. Es wird bewiesen, daß $M^n \in \Pi$, wenn $M^n$ eine glatte und orientierbare Mannigfaltigkeit ist, die eine der vier Eigenschaften besitzt : 1) $M^n$ ist geschlossen und parallelisierbar (z.B. : $n = 2$ ; $n = 3$ ; $M^n$ ist ein Liescher Gruppenraum) ; 2) $M^n$ ist geschlossen und kann regulär in einen $(n+2)$-dimensionalen euklidischen Raum eingebettet werden ; 3) $M^n$ ist offen und alle ihre Kohomologiegruppen sind leer ; 4) $M^n$ besitzt eine "reguläre Lage" in $M^l$ und $M^l \in \Pi$.

66.1356.021940
**Morse, M.**
*Rank and span in functional topology.*
Ann. Math., Princeton, (2) 41, 419-454. (1940)
Verf. ergänzt seine früheren Untersuchungen über die kritischen Werte (absolute und relative Minima, Minimaxwerte usw.) einer Funktion $F$, die auf einem metrischen Raum $R$ definiert ist : diese kritischen Werte stehen in Zusammenhang mit gewissen relativen Vietoris-Zykeln verschiedener Dimension 0, 1, ... und werden entsprechend 0-Wert, 1-Wert, ... genannt ; es sei $m_k$ die Anzahl der kritischen $k$-Werte ; es sei $p_l$ die $l$-te Bettische Zahl des Raumes $R$ ; die Theorie sucht die Zahlen $m_k$ und $p_l$ in Verbindung zu bringen. In den wichtigsten Anwendungen sind die $p_l$ bekannt und endlich, und von den kritischen Werten ist nichts bekannt (z. B. können die $m_k$ unendlich sein) ; die bisherigen Theorien beruhten aber auf gewissen Annahmen über die kritischen Werte, die bei den Anwendungen nicht feststellbar waren und zu bedauerlichen Umwegen zwangen (so war z. B. angenommen, daß die kritischen Werte sich höchstens bei $+\infty$ häufen). Verf. beseitigt jetzt solche Annahmen dank der Einführung des Begriffs der Spanne : die "Spanne" eines relativen Zykels ist der Unterschied zwischen dem oberen und unteren Zykelgrenzwert (superior and inferior cycle limit – Begriffe, die Verf. schon früher benutzt hat) ; ähnlicherweise kann die Spanne eines kritischen Wertes eingeführt werden. Es sei $m_k^e$ die Anzahl der kritischen $k$-Werte, deren Spanne höher als $e$ ist $(e < 0)$ ; es sei $n_{k+1}^e$ die Anzahl der $k$-dimensionalen Zykel, die in $R$ homolog null sind und deren Spanne höher als $e$ ist ; unter Voraussetzungen über $F$ und $R$, die sehr allgemein und praktisch erfüllt sind, beweist Verf., daß $m_k^e$ und $n_k^e$ endlich sind und daß

$$m_k^e = n_k^e + n_{k+1}^e + p_k \qquad (k = 0,\, 1,\, \ldots)$$

ist ; diese Beziehung enthält und erweitert alle seine früheren Ergebnisse.

67.0734.011941
**Alexandroff, P.**
*General combinatorial topology.*
Trans. Amer. math. Soc. 49, 41-105. (1941)
Es wird eine Definition des Homologieringes gegeben, die in normalen Räumen gilt, und die eine in lokal bikompakten Räumen gültige Erweiterung des Alexanderschen Dualitätssatzes ermöglicht. Diese Homologietheorie ist also derjenigen ähnlich, die *Kolmogoroff* (C. R. Acad. Sci., Paris, 202 (1936), 1144-1147, 1325-1327, 1558-1560, 1641-1643 ; F. d. M. $62_{\mathrm{I}}$, 675, 676) skizziert hatte, und auch denen, die *Alexander* (Ann. Math., Princeton, (2) 37 (1936), 698-708 ; 39 (1938), 883-912 ; F. d. M. $62_{\mathrm{I}}$, 673 ; $64_{\mathrm{I}}$, 602) mit wenig klassischen Methoden entwickelt hat. Verf. erklärt gründlich und mit interessanten Vereinfachungen folgende Begriffe von neuem : Dualität der oberen und unteren Berandung der Funktionen über einem Komplex ; Grenzgruppe einer halbgeordneten Menge homomorpher Gruppen (im Zusammenhang mit Pontrjagin und Steenrod) ; Dualität der oberen und unteren Grenzgruppen einer halbgeordneten Menge homomorpher Komplexe ; Homomorphismus der Nerven einer Überdeckung und einer ihrer Unterteilungen. Gemäß diesen Begriffen werden die dualen (oberen und unteren) Bettischen Gruppen der normalen Räume definiert ; diese Definition ist der *Steenrod*schen (Amer. J. Math. 58 (1936), 661-701 ; F. d. M. $62_{\mathrm{I}}$ 669) ähnlich ; außerdem

werden aber "innere" duale (obere und untere) Bettische Gruppen der normalen Räume und ihrer offenen Punktmengen eingeführt, indem diejenigen Elemente der offenen Überdeckungen ausgezeichnet werden, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist. Der Hauptsatz ist die Kolmogoroffsche Erweiterung des Alexanderschen Satzes : $A$ sei eine abgeschlossene Punktmenge eines lokal bikompakten Raumes $R$ ; es sei $B^r(X)$ die $r$-te *innere*, obere Bettische Gruppe von $X$ ; wenn $B^r(R)$ und $B^{r+1}(R)$ null sind, dann sind $B^r(A)$ und $B^{r+1}(R-A)$ isomorph ($r<0$) ; wenn $R$ zusammenhängend ist, und wenn $B^1(R)$ null ist, dann sind $B^{0,0}(A)$ und $B^1(R-A)$ isomorph. Endlich wird der Begriff der baryzentrischen Unterteilung eingeführt, um eine zweite Definition der Bettischen Gruppen zu erhalten, die insofern bequemer ist, als sie eine elegante Definition des Alexanderschen Homologieringes ermöglicht, die keine ausgezeichnete Eckenanordnung benötigt, die aber nicht bemerken läßt, daß zwei Elemente dieses Ringes immer kommutativ oder antikommutativ sind.

67.0734.021941
**Flexner, W. W.** Article
*Non-commutative chains and the Poincaré group.*
Duke math. J. 8, 497-505. (1941)
Verf. definiert die Poincarésche Gruppe eines abstrakten Komplexes ; er beweist, daß diese Gruppe bei einer Unterteilung des Komplexes unverändert bleibt, und daß sie tatsächlich die klassische Poincarésche Gruppe ist, wenn der Komplex ein Zellenkomplex ist.

67.0735.011941
**Hirsch, G.**
*Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés et des complexes de recouvrement.*
Bull. Soc. Sci. Liège 10, 246-260. (1941)
Es seien $\mathfrak{H}^i$ und $\mathfrak{H}_i$ die Bettischen Gruppen und die Kohomologiegruppen mod 2 eines $n$-dimensionalen zusammenhängenden Komplexes $K$. Jeder Überlagerungsfläche $\tilde{K}$ von $K$, die $K$ zweimal überdeckt, entspricht ein-eindeutig eine Untergruppe $\mathfrak{W}^1$ von $\mathfrak{H}^1$, deren Index 2 ist, und eine Untergruppe $\mathfrak{W}_1$ von $\mathfrak{H}_1$, deren Ordnung 2 ist, und die der Annullator der Untergruppe $\mathfrak{W}^1$ ist. Verf. drückt die Bettischen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}_i$ des Komplexes $\tilde{K}$ mittels $\mathfrak{H}^j$ und $\mathfrak{W}_1$ aus, ohne diesen Ausdruck festzustellen, den er als nicht immer gültig erklärt ; eine Folge dieses Ausdruckes ist die Formel : $\tilde{p}^i = 2p^i - r^i - r^{i+1}$, wo $p^i$ und $\tilde{p}^i$ die $i$-ten Bettischen Zahlen mod 2 der Komplexe $K$ und $\tilde{K}$ sind und $r^i$ der Rang der Untergruppe $\mathfrak{H}^i \cdot \mathfrak{W}_1$ der Gruppe $\mathfrak{H}^{i-1}$ ist. Es werde vorausgesetzt, daß die Abbildung $T$ des Komplexes $K$ in sich zwei Abbildungen $\tilde{T}'$ und $\tilde{T}''$ der Überlagerungsfläche $\tilde{K}$ in sich induziert ; $\mathfrak{H}^i \cdot O \cdot \mathfrak{W}_1$ sei die Menge solcher Elemente $H^i$ der Gruppe $\mathfrak{H}^i$, daß $H^i \cdot \mathfrak{W}_1 = 0$ ist, und $s$ bedeute die Spur eines Automorphismus ; Verf. beweist die Formel

$$s[T(\mathfrak{H}^i)] - s[T(\mathfrak{H}^i \cdot O \cdot \mathfrak{W}_1)] = s[T(\mathfrak{H}^1 - \mathfrak{W}^1)] \cdot s[T(\mathfrak{H}^i \cdot \mathfrak{W}_1)] \quad \text{mod } 2,$$

die den Borsukschen Satz über die antipodentreuen Abbildungen der Sphäre enthält. Verf. bemerkt, daß $K$ als ein Faserraum betrachtet werden kann, dessen Faser ein Punktepaar $S^0$ ist, und daß seine Methoden ebenfalls brauchbar sind, wenn $K$ ein Faserraum ist, dessen Faser $S^n$ eine $n$-dimensionale Sphäre ist. Eine ausführlichere Darlegung soll später erscheinen.

67.0740.011941
**Eilenberg, S.**
*Continuous mappings of infinite polyhedra.*
Ann. Math., Princeton, (2) 42, 459-468. (1941)
Folgende Anwendungen einer früheren Arbeit (Ann. Math., Princeton, (2) 41 (1940), 231-251 ; F. d. M. 66, 951 (JFM 66.0951.*)) ergeben : Den Homotopieklassen $\Phi$ der Abbildungen eines zusammenhängenden endlichen oder unendlichen Zellenkomplexes $K$ in einen zusammenhängenden topologischen Raum $Y$ entsprechen ein-eindeutig die Homomorphismen $h^n_\Phi$ der $n$- dimensionalen ganzzahligen Bettischen Gruppe $\mathfrak{H}^n(K)$ in der Gruppe $\mathfrak{H}^n(Y)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind : $n<1$ ; die Homotopiegruppen $\pi_i(K)$ und $\pi_i(Y)$ sind null für $i<n$ ; $H^n_G(K)$ sei die $n$-te Kohomologiegruppe des Komplexes $K$ mit der Koeffizientengruppe $G$ ; es gilt $H^i_{\pi_i(Y)}(K) = H^{i+1}_{\pi_i(Y)}(K) = 0$ für $i = n+1, n+2, \cdots$. $X$ und $Y$ gehören demselben Homotopietypus an (d. h. es gibt eine Abbildung $f$ von $X$ in $Y$ und eine Abbildung $g$ von $Y$ in $X$, so daß $g$ und $gf$ der identischen Abbildung homotop sind), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind : $X$ und $Y$ sind endliche oder unendliche zusammenhängende Komplexe ; $\pi_i(X) = \pi_i(Y) = 0$ für $i<n$ ; $\pi_n(X)$ und $\pi_n(Y)$ sind isomorph ;

$$H^{i+1}_{\pi_i(X)}(Y) = H^{i+1}_{\pi_i(Y)}(X) = H^i_{\pi_i(X)}(X) = H^i_{\pi_i(Y)}(Y) = 0$$

für $i = n+1, n+2, \ldots$ ; $n<1$. – Die Sphäre $S^{r-n-1}$ sei in die Sphäre $S^r$ eingebettet ; $n<1$ ; dafür daß $S^r - S^{r-n-1}$ und $S^n$ denselben Homotopietypus haben, ist notwendig und hinreichend, daß $\pi_1(S^r - S^{r-n-1}) = 0$ ist. – Die Sphären $S^n$ und $S^{r-n-1}$ seien disjunkt und in die Sphäre $S^r$ eingebettet ; $n<1$ ; dafür, daß es eine Retraktion von $S^r - S^{r-n-1}$ in $S^n$ gebe, die der Identität homotop sei, ist es notwendig und hinreichend, daß $S^n$ und $S^{r-n-1}$ nicht verschlungen sind, und daß $\pi_1(S^r - S^{r-n-1}) = 0$ ist. – Ähnliche Ergebnisse gelten für $n = 1$.

67.0742.031941
**Kakutani, S.**
*A generalization of Brouwer's fixed point theorem.*
Duke math. J. 8, 457-459. (1941)
Folgende Erweiterung des Brouwerschen Fixpunktsatzes wird gegeben : $M$ sei eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmenge eines euklidischen Raumes ; $\Phi(x)$ sei eine nach oben halb-stetige Abbildung, die jeden Punkt aus $M$ in eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge der Menge $M$ abbildet ; dann gibt es auf $M$ einen solchen Punkt $x$, daß $x \in \Phi(x)$. Dieser Satz ermöglicht einfache Beweise zweier von *Neumann*scher Sätze (Math. Ann., Berlin, 100 (1928), 295-320 ; Erg. math. Kolloqu. Wien 8 (1937), 73-83 ; F. d.M. 54, 543 ; $63_{\text{II}}$, 1167).

67.0743.011941
**Smith, P. A.**
*Transformations of finite period. III. Newman's theorem.*
Ann. Math., Princeton, (2) 42, 446-458. (1941)
Es sei $R$ ein zusammenhängender, im kleinen bikompakter, endlichdimensionaler Raum ; es sei $G$ eine offene Punktmenge, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist ; eine Abbildung $T$ von $R$ auf sich selbst heißt periodisch von der Periode $q$, wenn sie topologisch ist und ihre $q$-te Potenz die Identität ist : $T^q = 1$. *H. A. Newman* (Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 2 (1931), 1-8 ; F. d. M. $57_{\text{I}}$, 496) hatte folgenden Satz bewiesen : Wenn $R$, $G$ und $q$ vorgegeben sind, dann kann man eine solche Überdeckung $U$ von $R$ aufbauen, daß es für keine Abbildung $T$ der Periode $q$ möglich ist, jedem Punkt $x$ von $G$ ein Element $U_x$ aus $U$ zuzuordnen mit $x + Tx \subset U_x$. Dieser Satz wird vom Verf. in folgender Weise vervollständigt : $R$ und $G$ seien vorgegeben ($q$ aber nicht !) ; dann kann man eine solche Überdeckung $U$ von $R$ aufbauen, daß es für keine periodische Abbildung $T$ möglich ist, jedem Punkt $x$ von $G$ ein Element $U_x$ von $U$ zuzuordnen mit $x + Tx + T^2x + \cdots + T^{q-1}x \subset U_x$. $R$ war von H. A. Newman lokal-euklidisch vorausgesetzt ; Verf. ersetzt diese Bedingung durch Bedingungen topologischer Natur. Der ziemlich lange Beweis benützt die zwei ersten Teile dieser Arbeit (Ann. Math., Princeton, (2) 39 (1938), 127-164 ; (2) 40 (1939), 690-711 ; F. d. M. $64_{\text{II}}$, 1275 ; 65, 1446) und die Čechsche Definition der Homologie. Zuerst wird aber der Fall der Sphäre sehr einfach behandelt : Ist $R$ eine Sphäre, und ist $T$ periodisch, dann ist es unmöglich, daß die Menge $x + Tx + T^2x + \cdots + T^{q-1}x$ für jeden Punkt $x$ von $R$ auf einer halben Sphäre liegt.

67.0757.011941
**Roberts, J. H.** Article
*A theorem on dimension.*
Duke math. J. 8, 565-574. (1941)
$M_n$ soll einen $n$-dimensionalen, metrischen, separablen Raum darstellen, und $R_k$ einen $k$-dimensionalen euklidischen Raum. Verf. beweist zuerst folgendes : Es gibt eine solche Abbildung $f$ von $M_n$ in $R_{2n+1}$, daß dim $(f(M_n) \cdot R_k) \leq k - n - 1$, wenn $R_k$, irgend ein linearer Unterraum des Raumes $R_{2n+1}$ ist $(n+1 \leq k \leq 2n+1)$. Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist der Hurewiczsche Satz : Es gibt eine solche Abbildung $g$ von $M_n$ in $R_k$ daß dim $g^{-1}(p) \leq n - k$, wenn $p$ irgend ein Punkt der Menge $g(M)$ ist. Als zweite Folge und Hauptsatz wird folgende Hurewiczsche Vermutung festgestellt : $M_n$ und die ganze Zahl $i$ seien vorgegeben $(1 \leq i \leq n)$ ; dann gibt es einen solchen [$(n - i)$- dimensionalenl !] Raum $M_{n-i}$ und eine solche Abbildung $\varphi_i$, daß $\varphi_i(M_{n-i}) = M_n$, und daß $\varphi_i^{-1}(p)$ aus höchstens $i + 1$ Punkten besteht, wenn $p$ irgend ein Punkt des Raumes $M_n$ ist. Um diesen Hauptsatz zu beweisen, stellt Verf. in $R_k$ Punktmengen $H_i$ und Abbildungen $\varphi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ mit folgenden Eigenschaften auf : $H_i$ ist die Menge der Punkte des Raumes $R_k$ deren $i$-te Koordinate einem Cantorschen Diskontinuum angehört ; es sei $N_i = H_1 \cdot H_2 \cdots H_i$ ; $\varphi_i(N_i) = R_k$ ; $\varphi_i^{-1}(p)$ besteht aus höchstens $i + 1$ Punkten, wenn $p$ irgend ein Punkt des Raumes $R_k$ ist ; wenn $R_{k-i} \subset N_i$ dann ist $\varphi_i$ ein Homöomorphismus von $R_{k-i}$ auf einen linearen Unterraum des Raumes $R_k$.

67.1108.011941
**Kravtchenko, J.**
*Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz ; théorie des sillages et des proues.*
J. Math. pur. appl., Paris, (9) 20, 35-106, 107-234, 235-303. (1941)
Diese Untersuchung der Unstetigkeitsfläche, die ein Hindernis in einer ebenen, durch eine oder zwei gerade Wände begrenzten Strömung erzeugt, ist hauptsächlich theoretisch ; sie führt zu keinem numerischen Ergebnis. Die benutzten Methoden sind nicht neu ; aber die Einfachheit und Tragweite der Schlüsse sind

bemerkenswert. Sie zeigen, daß die Theorie der Unstetigkeitsfläche geeignet ist für sehr allgemeine Arten von Hindernissen, nämlich Hindernissen, die der Strömung einen großen Widerstand bieten.

Kap. I berichtet über Arbeiten von Helmholtz, Levi- Civita, Villat und entwickelt sorgfältig die Eigenschaften der auftretenden Funktionen und Parameter. Verf. führt den Stetigkeitsmodul $c\cdot|\log\varepsilon|^{-n}$ ein, dessen Brauchbarkeit im Kap. III zum Ausdruck kommt.

Kap. II vervollständigt die Untersuchungen der Gültigkeitsbedingungen von Brillouin, die von Villat, Jacob und Leray angestellt worden sind, er setzt voraus, daß das Hindernis eine Kurve ist, die von den Parallelen zu den Wänden in höchstens einem Punkt getroffen wird. Die Zahl der Wendepunkte der Strömungslinien kann mit Hilfe der Wendepunkte des Hindernisses abgeschätzt werden, und so kann in verschiedenen Fällen die Konvexität der Strömungslinien bewiesen werden. Längs den geraden Wänden ist die Strömunggeschwindigkeit kleiner als in der freien Strömung und stellt ein Minimum dar. Wenn das Hindernis eine "Klammer" ist (bei der die Krümmung der äußeren konvexen Bogen gegen die Endpunkte wächst), genügt die Unstetigkeitsfläche dem System der Gültigkeitsbedingungen von Brillouin, sobald die Strömungslinien sich stromabwärts ablösen.

Kap. III untersucht die folgende Aufgabe : Entspricht einem gegebenen Hindernis bei gegebenen Wänden stets eine Unstetigkeitsfläche ? Diese Aufgabe heißt Unstetigkeitsflächenaufgabe, wenn man fordert, daß die Strömungslinien sich von dem Hindernis an seinen Endpunkten lösen ; wenn man dagegen voraussetzt, daß sie sich entweder an den Endpunkten und stromabwärts oder auch anderswo und am Bug ablösen, heißt die Aufgabe Bugaufgabe. Verf. verallgemeinert Schlußweisen, die bisher nur in den einfachsten Fällen unbegrenzter Strömungen entwickelt worden sind, und beweist, daß jede der beiden Aufgaben mindestens eine Lösung besitzt. Diese Existenzsätze werden mit Hilfe der Theorie der Funktionalgleichungen von Leray und Schauder auf gewisse Abschätzungen der unbekannten mittels der gegebenen Größen zurückgeführt. Fast alle diese Abschätzungen ergeben sich aus einem Hilfssatz über die Ränderzuordnung bei der konformen Abbildung. Verf. betont die Anwendungsmöglichkeiten dieses Hilfssatzes. Überdies kann Verf. auf Grund dieses Hilfssatzes entscheiden, wie sich die unbekannten Funktionen und Parameter, die die Unstetigkeitsfläche bestimmen, verhalten, wenn die Wände einen beliebig kleinen Abstand vom Hindernis haben, und sogar (und das ist eine sehr delikate und originelle Untersuchung), wenn die Entfernung des Hindernisses von der einen Wand gegen Null geht. Die Darstellung besitzt leider einige Unsauberkeiten (Verf. verwechselt zuweilen die beiden Begriffe : beschränkte Funktion und Funktion, deren Werte sämtlich endlich sind) und einen falschen Schluß (Nr. 25, S. 189), der leicht richtigzustellen ist.

Unter weiterer Verallgemeinerung der nur in den einfachsten Fällen entwickelten Schlüsse untersucht Verf. im Kap. IV die Variationsgleichung der Unstetigkeitsflächenaufgabe ; er zeigt, daß diese Gleichung gleichbedeutend ist mit einer Aufgabe der von Weinstein behandelten Art, auf die ein Hilfssatz von Friedrichs anwendbar ist. So erhält Verf. Ergebnisse über die Art, wie die Unstetigkeitsfläche sich verändert, wenn man die Wände beliebig wenig verschiebt oder das Hindernis beliebig wenig verlängert. Mit Hilfe der Theorie der Funktionalgleichungen von Leray und Schauder beweist er, das jedes der folgenden Probleme eine Lösung besitzt : Die Aufgabe der symmetrischen Unstetigkeitsfläche, die symmetrische Bugaufgabe für die Klammer, die Unstetigkeitsflächenaufgabe für ein konvexes Hindernis und die Bugaufgabe für einen konvexen Kreisbogen.

68.0206.011942
**Gillis, P.**
*Sur les formes différentielles alternées.*
Bull. Soc. Sci. Liège 11, 464-470. (1942)
Verf. faßt hier eine Arbeit kurz zusammen, die er in Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém. veröffentlichen wird. É. Cartan hatte das Problem gestellt, die Theorie der Differentialformen unter schwächeren Regularitätsbedingungen aufzubauen. Verf. löst diese Aufgabe, indem er Differentialformen behandelt, deren Koeffizienten nur stetig, oder sogar nur beschränkt und meßbar sind ; er definiert das Differential $d\omega_p$ der $p$-dimensionalen Form $\omega_p$ als eine solche $(p+1)$-dimensionale Form, daß für jede $(p+1)$-dimensionale $c_{p+1}$, deren Rand $rc_{p+1}$ ist, die Formel $\int\limits_{c_{p+1}} d\omega_p = \int\limits_{rc_{p+1}} \omega_p$ gilt ; mit Hilfe der Tonellischen Annäherungspolynome beweist er, daß, wenn der Raum euklidisch ist, $d\omega_p = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung ist, damit $\omega_p$ ein Differential sei, und daß die Formel $d(\omega_p\omega_q) = (d\omega_p)\omega_q + (-1)^p\omega_p(d\omega_q)$ noch gültig bleibt. Dies ermöglicht ihm interessante Bedingungserleichterungen betreffend : 1) die de Rhamschen Sätze über die Beziehungen zwischen den Differentialformen und den Bettischen Gruppen einer Mannigfaltigkeit ; 2) die harmonischen Formen ; 3) die Integralinvarianten der Differentialgleichungen ; 4) die geodätischen Felder der Variationsrechnung.

68.0206.021942
**Lepage, T. H. J.**
*Quelques remarques sur les formes alternées intégrables.*

Bull. Soc. Sci. Liège 11, 510-518. (1942)
Verf. beweist von neuem den Goursatschen Satz : Das zu einer Differentialform assoziierte System ist vollständig integrierbar. Dann betrachtet er die Formen :

$$\widetilde{\omega} = f(x_1, \ldots, x_n;\ z;\ p_1, \ldots, p_n) dx_1 \cdots dx_n;\ \omega = dz - \sum_i p_i\, dx_i;$$

$$\varOmega = \widetilde{\omega} + \sum_i f'_{p_i} dx_1 \cdots dx_{i-1} \omega dx_{i+1} \cdots dx_n,$$

die in der Variationsrechnung wesentlich sind. – Zum Beispiel ist die Form :

$$\pi = Adpdy + B(dxdp + dqdy) + Cdxdq + Ddxdy + Edpdq$$

$$(x = x_1,\ y = x_2,\ p = p_1,\ q = p_2)$$

einer Form des Typus $\widetilde{\omega}$ gleichwertig, wenn $B^2 = AC$ und

$$\begin{aligned}\pi = \xi[(D'_q - C'_y - qC'_z - B'_x - pB'_z)\, dx + (A'_x + pA'_z + B'_y + qB'_z - D'_p)\, dy \\ +(A'_q - B'_p - E'_y - qE'_z)\, dp + (B'_q - C'_p + E'_x + pE'_z)\, dq],\end{aligned}$$

wo $\xi$ eine lineare Form ist. – Es sei $\varrho$ der Rang der Matrix $\| f''_{p_i p_j} \|$ ; der Rang der Form $d\varOmega$ ist gleich $n+1$, wenn $\varrho = 1$, und $n + \varrho + 1$, wenn $1 < \varrho \leq n$ ist ; die Zahl der linear unabhängigen Teiler von $d\varOmega$ ist $n+1$, wenn $\varrho = 1$, und $n - \varrho + 1$, wenn $\varrho < 1$ ist.

68.0501.051942
**Calugareanu, G.**
*Sur les invariants topologiques attachés aux courbes et surfaces fermées.*
Disqu. math. physic. Bucureşti 2, 149-167. (1942)
Damit ein Linien- oder Flächenintegral eine topologische Invariante sei, ist notwendig und hinreichend, daß der Integrand gewisse Differentialgleichungen erfüllt ; Verf. drückt diese Gleichungen aus und prüft als Anwendung nach, daß die klassischen Kroneckerschen Integranden sie erfüllen.

68.0502.031942
**Blanc, C.**
*Complexes à n dimensions et intégrales abéliennes.*
Comment. math. Helvetici 14, 212-229. (1942) Article
$C^n$ sei ein endlicher und orientierbarer Komplex ; $\overline{C}^n$ der konjugierte. Verf. führt folgende Definitionen an, die von de Rham stammen : eine $p$-Form ist eine Funktion $\omega(a^p)$ der Elemente $a^p$ von $C^n$ ; die konjugierte $(n-p)$-Form ist $\overline{\omega}(b^{n-p}) = \omega(a^p)$, wobei $b^{n-p}$ das zu $a^p$ konjugierte Element ist ; jeder $p$-Form $\omega$ entsprechen das $p$-Feld $\gamma^p_\omega = \sum \omega\,(a^p)\ a^p$ und das $(n-p)$-Feld $\overline{\gamma}^{n-p}_\omega = \sum \overline{\omega}\,(b^{n-p})\ b^{n-p}$ ; Verf. gibt noch die Definitionen der Schnittzahl $I\left(\gamma^p_1,\, \overline{\gamma}^{n-p}_2\right)$ und des Integrals $\int\limits_{\gamma^p_1} \omega\,(a^p) = I\left(\gamma^p_1,\, \overline{\gamma}^{n-p}_\omega\right)$ ; diese Begriffe und die Begriffe : Rand und Differential besitzen die klassischen Stokesschen Eigenschaften ; ist $\omega$ integrabel (d. h. ist $\omega' = 0$), so ist $\overline{\gamma}^{n-p}_\omega$ ein Zyklus ; ist $\omega \sim 0$ (d. h. ist $\omega$ gleich einem Differential), so ist $\overline{\gamma}^{n-p}_\omega \sim 0$ ; und umgekehrt. Unter den $p$-Formen nennt Verf. diejenigen $p$-Formen von erster Art, die mit ihren konjugierten integrabel sind, von zweiter Art, die nullhomolog sind, und von dritter Art, deren konjugierte nullhomolog sind. Verf. entwickelt eine Theorie dieser Formen, die der Theorie der Abelschen Integrale ähnlich ist : Bei Minimalwerden eines Integrals $\int\limits_{C^n} \omega^2(a^p)$ beweist er, daß jede $p$-Form Summe einer $p$-Form erster Art, einer zweiter Art und einer dritter Art ist, die alle eindeutig bestimmt sind. $B^p$ sei die $p$-te Bettische Zahl von $C^n$ und $\overline{C}^n$ ; es gibt eine wohlbestimmte $p$-Form erster Art, deren Perioden $B^p$ vorgegebene Zahlen sind ; Verf. bestimmt $B^p$ normale $p$-Formen erster Art und ordnet jedem $a^p$ eine normale $p$-Form zweiter Art und eine normale $p$-Form dritter Art zu. Er beweist verschiedene bemerkenswerte Beziehungen zwischen den normalen $p$-Formen und deren Perioden. Er definiert die rationalen $p$-Formen als lineare Kombinationen der $p$-Formen zweiter und dritter Art ; sie sind zu den $p$-Formen erster Art orthogonal. $N_k$ sei die Anzahl der unabhängigen rationalen $p$-Formen, die außerhalb eines aus $k$ Elementen $a^p$ bestehenden Systems $\varGamma^p_k$ null sind ; $\mu_k$ sei die Anzahl der unabhängigen $p$-Formen erster Art, die auf $\varGamma^p_k$ null sind ; es gilt $N_k = k - (B^p - \mu_k)$, analog zur Formel im Riemann-Rochschen Satz. Verf. gibt Reziprozitätsformeln an, die denen von Brill-Noether ähnlich sind.

68.0504.011942
**Steenrod, N. E.**

*Topological methods for the construction of tensor functions.*
Ann. Math., Princeton, (2) 43, 116-131. (1942)
Mittels Verschärfungen *Eileniergscher* Beweise (Ann. Math., Princeton, (2) 41 (1940), 231-251; F. d. M. 66, 951) wird folgendes festgestellt : Es seien ein Faserraum $X$, ein Komplex $K$ und eine Abbildung $\psi$ von $K$ in die Basis $B$ von $X$ vorgegeben; es seien $F$ die Faser (die kompakt sein soll), $\pi$ die Projektion jeder Faser auf einen Punkt von $B$, $h$ die kleinste ganze Zahl, für welche die Homotopiegruppe $\pi_h(F)$ von Null verschieden ist, und $K^l$ die Menge der höchstens $l$-dimensionalen Simplexe von $K$; dann gibt es solche Abbildungen $\psi'$ von $K^h$ in $X$, daß $\pi\psi' = \psi$; mit jeder solchen Abbildung $\psi'$ ist ein Kozyklus $c^{h+1}(\psi')$ von $K$ verbunden; die notwendige und hinreichende Bedingung, damit es eine Erweiterung auf $K^{h+1}$ der Abbildung $\psi'$ mit der Eigenschaft $\pi\psi' = \psi$ gibt, ist, daß $c^{h+1}(\psi') = 0$ ist; die Kohomologieklasse $c^{h+1}$ der Kozykel $c^{h+1}(\psi')$ ist von $\psi'$ unabhängig; jeder Zykel dieser Klasse $c^{h+1}$ ist ein $c^{h+1}(\psi')$; $c^{h+1}$ ist das inverse Bild durch $\psi$ einer Kohomologieklasse von $B$, die vom Faserraum $X$, aber weder von $\psi$ noch von $K$ abhängt. Die Koeffizienten dieser Homologien sind Elemente von $\pi_h(F)$, wenn $B$ einfach zusammenhängend ist; im allgemeinen sind sie aber mehrdeutige Funktionen, deren Definitions- und Wertraum $B$ und $\pi_h(F)$ sind. Wenn $h = 1$, muß $\pi_1(F)$ als abelsch vorausgesetzt werden. Folgender Fall wird besonders betrachtet : $K = B$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $M$ ; $X$ ist die Menge der Tensoren auf $M$, die einer solchen Bedingung unterworfen sind, daß $X$ ein Faserraum sei; die Faser, die die Menge der Tensoren mit einem solchen Angriffspunkt ist, darf nicht mehr kompakt sein; die Abbildung $\psi'$ von $M$ in $X$ wird als "tensor function" bezeichnet. Als Beispiel wird mit dieser Methode der *Whitneysche* Satz (Ann. Math., Princeton, (2)37 (1936), 645-680; F. d. M. $62_{\mathrm{II}}$, 1454) von neuem bewiesen, daß eine Riemannsche Metrik auf $M$ definiert werden kann.

68.0505.041942
**Eckmann, B.**
*Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen.*
Comment. math. Helvetici 14, 234-256. (1942) Article
Im ersten Teil untersucht Verf. die Hurewiczschen Homotopiegruppen der Räume, in welchen eine stetige Multiplikation erklärt ist; das heißt : jedem geordneten Punktepaar $(a, b)$ ist als Produkt ein Punkt $a \cdot b$ desselben Raumes zugeordnet, der stetig vom Paar $(a, b)$ abhängt (die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes wird also nicht gefordert). Ein solcher Raum soll $\Gamma$-Raum heißen. Gibt es bezüglich der Multiplikation ein Einselement $e(a\cdot e = e\cdot a = a)$, dann wird der Raum $\Gamma_e$- Raum genannt. In diesem Fall wird gelegentlich auch angenommen, daß "das Inverse existiert", d. h. daß es zu jedem Punkt $a$ einen Punkt $a^{-1}$ mit $a \cdot a^{-1} = e$ gibt, der von $a$ stetig abhängt. (Jeder Gruppenraum ist ein $\Gamma_e$-Raum mit Inversem.) Es seien $R$ ein $\Gamma$-Raum, $X$ ein Kompaktum, $f(x)$ und $g(x)$ zwei stetige Abbildungen von $X$ in $R$, $f$ (und $g$) die Klasse homotoper Abbildungen von $X$ in $R$, die $f(x)$ (und $g(x)$) enthält; dann soll $f \cdot g$ die Klasse bezeichnen, die $f(x) \cdot g(x)$ enthält. $\pi_n(R)$ sei die $n$-te Homotopiegruppe von $R$, und für $f,\ g \in \pi_n(R)$ bedeute $f + g$ die nach Hurewiczscher Vorschrift auszuführende Addition der Homotopieklassen.

*Satz I* : $R$ sei ein $\Gamma$-Raum; für $f_i,\ g_i \in \pi_n(R)$, $i = 1, 2$, gilt bei beliebigem $n : (f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2)$.

*Satz II* : $R$ sei ein $\Gamma_e$-Raum; für $f,\ g \in \pi_n(R)$ gilt bei beliebigem $n : f \cdot g = f + g$.

(In einem $\Gamma_e$-Raum fällt also die Multiplikation $f\cdot g$ der Homotopieklassen mit der Hurewiczschen Addition zusammen und ist somit von selbst assoziativ.) In einem $\Gamma_e$- Raum wird die Potenz $a^k$ durch $a^0 = e$, $a^k = a \cdot a^{k-1}$ definiert.

*Satz III* : $R$ sei ein $\Gamma_e$-Raum; für $f \in \pi_n(R)$ gilt bei beliebigem $n : f^k = kf$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$ und, wenn das Inverse existiert, auch für $k < 0$.

*Salz IV* : $R$ sei ein $\Gamma_e$-Raum; $S^n$ sei die $n$-dimensionale Sphäre; für $f,\ g \in \pi_n(R)$, $h \in \pi_r(S^n)$ gilt bei beliebigem $n$ und $r : (f+g)h = fh+gh$, also auch $(-f)h = -(fh)$. (Übrigens gilt immer $f(g+h) = fg+fh$.)

Im zweiten Teil wendet Verf. diese Ergebnisse an auf den Fall einer $m$- dimensionalen Sphäre $S^m$, die $\Gamma_e$-Raum ist. (Solche sind $S^3$ und $S^7$.) $T_k$ bezeichnet eine Abbildung der $S^m$ in sich vom Grade $k$.

*Satz V* : $S^m$ sei ein $\Gamma_e$-Raum; dann gilt für $f \in \pi_n(S^m)$ bei beliebigem $n$ und $k : T_k f = kf$.

*Satz VI* : Es gilt $T_k f = kf$ für $f \in \pi_{r+d}(S^r)$ mit $d \leq 7$, $r < d + 1$ (und mit $d \leq 7$, $r = d + 1$, $y(f) = 0$, wo $\gamma$ die Hopfsche Invariante bedeute). *Corollar* : Es gilt $T_2 f = 0$ für $f \in \pi_{r+1}(S^r)$, $r \geq 3$. (Dagegen ist $T_{-1} f = f$ für $f \in \pi_n(S^2)$, $n \geq 3$.)

Im dritten Teil bestimmt Verf. die dritte, vierte und fünfte Homotopiegruppe $r$ orthogonalen Gruppen unter Verwendung einer früheren Arbeit (Comment. math. Helvetici 15 (1942), 1-26; F. d. M. 68). $\Gamma_n$ bedeute die Gruppe aller orthogonalen $(n + 1)$-reihigen Matrizen mit der Determinante $+1$, $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}_2$ die Restklassengruppe von $\mathfrak{G}$ mod 2 ($\approx$ bedeutet isomorph).

*Satz VII* : Für $n \geq 4$ ist $\pi_3(\Gamma_n) \approx \mathfrak{G}$, für $n \geq 5$ ist $\pi_4(\Gamma_n) = 0$, für $n \geq 6$ ist $\pi_5(\Gamma_n) = 0$, $\pi_3(\Gamma_2) \approx \mathfrak{G}$, $\pi_3(\Gamma_3) \approx \mathfrak{G} + \mathfrak{G}$, $\pi_4(\Gamma_2) \approx \mathfrak{G}_2$, $\pi_4(\Gamma_3) \approx \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2$, $\pi_4(\Gamma_4) \approx \mathfrak{G}_2$, $\pi_5(\Gamma_2) \approx \mathfrak{G}_2$, $\pi_5(\Gamma_2) = 0$, $\pi_5(\Gamma_3) = 0$, $\pi_5(\Gamma_4) = 0$, $\pi_5(\Gamma_5) \approx \mathfrak{G}$.

68.0506.011942

**Whitehead, G. W.**

*Homotopy properties of the real orthogonal groups.*

Ann. Math., Princeton, (2) 43, 132-146. (1942)

Verf. bestimmt die $i$-te Homotopiegruppe $\pi_i(R_n)$ der Drehungsgruppe $R_n$ der $n$-dimensionalen Sphäre $S_n$ und die erzeugenden Elemente dieser Gruppe, wenn $i = 1, \dots, 5$. $G$ bezeichne die Gruppe der ganzen Zahlen und $G_2$ ihre Restklassengruppe mod 2 ; es gilt $\pi_1(R_1) \cong G$ ; $\pi_1(R_n) \cong G_2$ für $n < 1$ ; $\pi_2(R_n) \cong 0$ ; $\pi_3(R_1) \cong 0$ ; $\pi_3(R_n) \cong G$ für $n = 2$ und $n < 3$ ; $\pi_3(R_3) \cong G+G$ ; $\pi_4(R_n) \cong 0$ für $n = 1$ und $n < 4$ ; $\pi_4(R_2) \cong \pi_4(R_4) \cong G_2$ ; $\pi_4(R_3) \cong G_2 + G_2$, $\pi_5(R_n) \cong 0$ für $n \neq 5$ ; $\pi_5(R_5) \cong G$. Verf. wendet seine Ergebnisse an auf die $k$-Felder der Sphären (ein $k$-Feld ist ein System von $k$ tangentialen, stetigen, singularitätenfreien Richtungsfeldern, derart, daß in jedem Punkt diese $k$ Richtungen paarweise orthogonal sind) : Auf den Sphären $S^{4p+3}$ gibt es ein 3-Feld ; auf $S^{8p+7}$ ein 7-Feld ; auf $S^{4p+1}$ aber kein 2-Feld. Alle diese Ergebnisse hat *Eckmann* mit etwas anderen Beweisen gleichzeitig veröffentlicht (in der vorstehend besprochenen und der dort erwähnten Arbeit). Die Hauptpunkte des Beweises sind folgende : Es werden eine "Projektion" $\pi$ von $R_n$ auf $S^n$ und eine "kanonische Abbildung" $C_n$ von $S^n$ auf $R_n$ eingeführt. Je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist, hat $\pi C_n$ den Abbildungsgrad 0 oder 2. Die vier folgenden Bedingungen sind gleichwertig : Es gibt eine solche Abbildung $F$ von $S^n$ auf $R^n$, daß $\pi F$ den Abbildungsgrad 1 hat ; $R_n = R_{n-1} \times S^n$ ; der natürliche Homomorphismus von $\pi_{n-1}(R_{n-1})$ auf $\pi_{n-1}(R_n)$ ist ein Isomorphismus ; $C_{n-1}$ ist nullhomotop. Wenn $n = 4p + 1$ (und wenn $n = 2p$), sind diese vier Bedingungen nicht erfüllt. Außerdem werden Sätze von W. Hurewicz, Steenrod, H. Hopf, Pontrjagin und Freudenthal angewandt.

68.0510.031942

**Laboureur, J.**

*Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallélisme.*

Bull. Soc. math. France 70, 181-185. (1942)Article

Verf. setzt drei Noten fort, die in den C. R. Acad. Sci., Paris, erschienen sind (*J. Feldbau*, 208 (1939), 1621-1623 ; *C. Ehresmann*, *J. Feldbau*, 212 (1941), 945-948 ; *C. Ehresmann*, 213 (1941), 762-764 ; F. d. M. 65, 868 ; 67, 740) ; indem er die erste dieser Noten berichtigt, zählt er die Klassen der isomorph gefaserten Räume auf, deren Faserraum eine Sphäre ist ; andererseits gibt er vier Eigenschaften einer Sphäre an, die gleichwertig sind mit der Eigenschaft, parallelisierbar zu sein. Die Beweise sind nur sehr kurz angedeutet.