Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Mathématiques
Géométrie euclidienne M32

Contrôle continu du 27 octobre 2004
Durée 1h15

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

I (Exercice préliminaire)

Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$Q(u,v) = uv, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(**I**.1) Donner la forme polaire Φ de Q.

(**I**.2) Donner une décomposition de Q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

(**I**.3) Donner la matrice de la forme Q dans la base $\mathbf{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$.

II

Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre 2

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit q la fonction définie sur E par

$$q(x) = ad - bc, \quad x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E.$$

(**II**.1) Montrer que q est une forme quadratique et donner sa forme polaire φ.

(**II**.2.a) Donner une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

(**II**.2.b) Quel est le rang de q ?

(**II**.2.c) Quelle est la signature de q ?

(**II**.3) Soit $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(**II**.3.a) Déterminer l'orthogonal H_0 de x_0.

(**II**.3.b) Quelle est la dimension de H_0 ?

(**II**.3.c) A-t-on $H_0 \oplus \mathbb{R}x_0 = E$?

(**II**.4) Donner une base orthogonale $\mathbf{b}$ de E pour la forme quadratique q. Quelle est la matrice de q dans cette base $\mathbf{b}$?