Université de Nantes
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques **Année 2004-2005**

S3M02-Géométrie euclidienne - Contrôle continu 2
Tous les documents et machines sont interdits

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $<,>$, soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur *unitaire*. Soit $D := \mathbb{R}\,u$ la droite vectorielle engendrée par u, et p_D la projection orthogonale sur D. Montrer que la matrice de p_D dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $<,>$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie de $(\mathbb{R}^3, <,>)$.
2. Justifier par un calcul simple que f est une rotation.
3. Déterminer l'axe D de cette rotation. Donner une équation cartésienne de l'orthogonal $D^\perp$ de D.
4. (a) Soit $e'_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})$ et $e'_2 = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$. Calculer $e'_1 \wedge e'_2$ et vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_1 \wedge e'_2)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, <,>)$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_1 \wedge e'_2)$.
   (c) En déduire la valeur (au signe près) de l'angle autour de l'axe D.
5. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$.