Université de Nantes **Année 2004-2005**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne
Devoir à rendre avant le 19 novembre

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$, on considère les deux vecteurs $u_1 = (0,1)$ et $u_2 = (\sqrt{3},1)$. On note s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle D_1 engendrée par u_1, et s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle D_2 engendrée par u_2.

1. Donner les matrices de s_1 et s_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.

Exercice 2. Dans le plan affine muni de son repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, soit ABC un triangle équilatéral. (On rappelle que par définition $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$).

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, faire une figure et construire le point G.
2. En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons montrer que: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire que la droite AG est perpendiculaire à la droite BC.
3. Soit s_{AG} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (affine) AG. Montrer que s_{AG} envoie B sur C. En déduire que s_{AG} laisse le triangle ABC invariant. Montrer qu'il en est de même pour les symétries orthogonales par rapport aux droites BG et CG.
4. En déduire que les rotations de centre G et d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{3}$ laissent le triangle ABC invariant.

   On pourra commencer par vérifier que $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$.