Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Mathématiques
Géométrie euclidienne M32

Examen du 4 janvier 2005
Durée 1h30

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation.
En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.
Le sujet est composé de deux exercices indépendants.

I

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne standard.
Si $\mathcal{F}$ est un lieu géométrique, on appelle *corde de* $\mathcal{F}$ tout segment $[F_1, F_2]$ où F_1, F_2 sont deux points distincts de $\mathcal{F}$ et *milieu de la corde* $[F_1, F_2]$ le milieu $(F_1 + F_2)/2$ de ses extrémités.

(**1**) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O_{\mathcal{C}}$. Soit Δ une droite passant par le centre $O_{\mathcal{C}}$.

(**1**.a) Montrer qu'il existe une unique droite passant par $O_{\mathcal{C}}$, notée Δ', telle que le milieu de toute corde de $\mathcal{C}$ parallèle à Δ appartienne à Δ'.

(**1**.b) Montrer que $(\Delta')' = \Delta$.

(**2**) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre $O_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{C}$ le cercle de la question précédente.

(**2**.a) Montrer qu'il existe une transformation affine bijective T telle que $T(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$ et $T(O_{\mathcal{E}}) = O_{\mathcal{C}}$.

(**2**.b) Soit D une droite passant par le centre $O_{\mathcal{E}}$. Montrer qu'il existe une unique droite passant par $O_{\mathcal{E}}$, notée $\widetilde{D}$, telle que le milieu de toute corde de $\mathcal{E}$ parallèle à D appartienne à $\widetilde{D}$. *Indication* : on pourra vérifier $\widetilde{D} = T^{-1}(\Delta')$ avec $\Delta = T(D)$.

(**2**.c) A-t-on $\widetilde{D}$ orthogonale à D ? Discuter.

(**3**) Soit (O, e_1, e_2) un repère orthonormé du plan et $\mathcal{H}_0$ l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$ dans ce repère. Pour (α, β) vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, on note par $D_{\alpha,\beta}$ la droite passant par O et de vecteur directeur (α, β).

(**3**.a) Montrer que le milieu de toute corde de $\mathcal{H}_0$ parallèle à $D_{\alpha,\beta}$ appartient à la droite $D_{\beta,\alpha}$.

(**3**.b) Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole du plan $\mathbb{R}^2$ et D une droite passant par le centre de $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe une droite $\overline{D}$ telle que le milieu de toute corde de $\mathcal{H}$ parallèle à D appartienne à la droite $\overline{D}$.

II

Soit V la transformation de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ définie par

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{-2x-y+2z}{3} & + & 1\\ \dfrac{2x-2y+z}{3} & + & 1\\ \dfrac{x+2y+2z}{3} & + & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(**1**) Montrer que la partie linéaire $\overrightarrow{V}$ de V est une rotation. Préciser sa direction de vecteurs invariants.

(**2**) Montrer que V n'a pas de point fixe.

(**3**) D'après les deux questions précédentes, V est un vissage d'axe A, *i. e.* la composition d'une rotation d'axe A et d'une translation de vecteur parallèle à A. Montrer que l'axe A du vissage V est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MV(M)}$ soit parallèle à la direction de l'axe A. Déterminer cet axe.