

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 1

Des exercices de révision.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de \mathbb{R}^3 , est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z .
2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 ; f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 ; f(v) = 4v\}$. Montrer que
 - (a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 dont on donnera une base.
 - (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, -1)$, $e_2 = (0, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
 - (a) Montrer que \mathcal{E} est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Donner la matrice B de f dans la base \mathcal{E} . Retrouver le résultat en appliquant la formule de changement de base.

Exercice 2. Soit $E := \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 . On considère l'application $f : E \rightarrow E$, définie par:

$$f(aX^2 + bX + c) = cX^2 + bX + a.$$

1.
 - (a) Montrer que f est un isomorphisme.
 - (b) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de E . Calculer A^2 et A^{-1} .
2. On considère l'application $g : E \rightarrow E$, définie par:

$$\forall P \in E, \quad g(P) = f(P) - P.$$

- (a) Montrer que g est linéaire.
- (b) Déterminer le noyau de g et donner sa dimension.
- (c) Quelle est la dimension de l'image Img de g ? Donner une ou des équation(s) caractéristique(s) de Img .

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble E des applications linéaires $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Les éléments de E sont appelés *formes linéaires* sur \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que le noyau d'une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 , non nulle, est de dimension 2.
2. Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'application $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in E, \quad f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i.$$

- (a) Montrer que les f_i sont linéaires et qu'elles forment une base de E .
- (b) Pour $i = 1, 2, 3$, on considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définies pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 par :

$$\varphi_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\varphi_2(x) = x_1 + x_2$$

$$\varphi_3(x) = x_1 + x_3.$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E .

Formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques : définition, changements de bases.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x_1 y_1 + 4 x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_1 y_3 + 2 x_3 y_1 + 3 x_2 y_3 + 3 x_3 y_2.$$

1. Vérifier que f est une forme bilinéaire symétrique. On note q la forme quadratique associée.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .
3. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (-1, 1, 0), e'_3 = (-3, 1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tous x et y dans \mathbb{R}^3 , calculer $f(x, y)$ et $q(x)$ dans cette base.
4. Donner une base q -orthogonale de vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Exercice 5. On considère la forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), \quad q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 54x_3^2 - 4x_1x_2 + 14x_1x_3 - 32x_2x_3.$$

On désigne par f la forme bilinéaire symétrique associée à q .

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 . Pour tous x et y dans \mathbb{R}^3 , déterminer $f(x, y)$ dans cette base.
2. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (2, 1, 0), e'_3 = (-3, 2, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tout x de \mathbb{R}^3 , déterminer $q(x)$ dans cette base.
3. Déterminer l'orthogonal, pour la forme quadratique q , du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(-3, 2, 1)$.