

S3M0200-Géométrie euclidienne  
Série d'exercices 2

Bases duales

**Exercice 1.** Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On pose

$$f_1 := e_1, \quad f_2 := e_1 + e_2, \quad f_3 := e_1 + e_2 + e_3.$$

Vérifier que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base et déterminer sa base duale.

**Exercice 2.** On considère les trois formes linéaires  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ , définies sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \ell_1(x) = x_1, \quad \ell_2(x) = x_1 + x_2, \quad \ell_3(x) = x_1 + x_2 + x_3;$$

Montrer que  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$  est une base du dual de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la base de  $\mathbb{R}^3$  dont c'est la base duale.

Formes quadratiques - Réduction de Gauss

**Exercice 3.** Pour  $a$  réel donné, on considère la forme quadratique  $q_a$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q_a(x) = x_1^2 + 2a x_1 x_2 + x_2^2.$$

1. Déterminer suivant les valeurs de  $a$ , le rang et la signature de  $q_a$ . Quelles sont les valeurs de  $a$  pour lesquelles la forme bilinéaire symétrique  $f_a$  associée à  $q_a$  est un produit scalaire euclidien?
2. Déterminer une base de  $E$   $q_a$ -orthogonale et écrire la matrice de  $q_a$  dans cette base.
3. Dans le cas  $a = 1/2$ , déterminer et dessiner l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(1, 0)$ .

**Exercice 4.**

1. On considère la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

Déterminer le rang et la signature de  $q$ . Trouver une base  $q$ -orthogonale et écrire la matrice de  $q$  dans cette base.

2. Mêmes questions avec la forme quadratique définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

**Exercice 5.** On considère la forme quadratique  $q$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), \quad q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

1. Donner la matrice de  $q$  dans la base canonique.
2. Faire une réduction de Gauss de  $q$ .
3. Déterminer le rang et la signature de  $q$ .
4. On considère les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants :

$$f_1 := \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad f_2 := \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad f_3 := \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$ .  
Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^3$ , exprimer  $q(x)$  dans cette base.

### Produits scalaires euclidiens

**Exercice 6.** On considère l'espace vectoriel  $E$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit  $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$\forall P \in E, \forall Q \in E, \quad f(P, Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) dt.$$

1. Montrer que  $f$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Montrer que

$$\forall P \in E, \forall Q \in E, \left( \int_0^1 P(t) Q(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_0^1 P(t)^2 dt \right) \left( \int_0^1 Q(t)^2 dt \right).$$

3. Déterminer une base de  $E$  orthonormée pour  $f$ .
4. Déterminer l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $X^2$ .

**Exercice 7.** On considère l'espace vectoriel  $E$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit  $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$\forall A \in E, \forall B \in E, \quad f(A, B) = \text{tr}({}^tAB).$$

1. Montrer que  $f$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $F = \{A \in E, \text{tr}(A) = 0\}$ . Vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Déterminer  $F^\perp$ .
3. Déterminer une base de  $E$  orthonormée pour  $f$ .

**Exercice 8.** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel, on considère les deux vecteurs  $e_1 = (1, -1, 2)$ ,  $e_2 = (2, 1, -1)$ , ainsi que le sous-espace vectoriel  $F$  engendré par ces deux vecteurs.

1. En utilisant la méthode de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  dont les deux premiers vecteurs forment une base de  $F$ .
2. Déterminer la projection orthogonale du vecteur  $u = (1, 2, 3)$  sur  $F$ .
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant  $F$  par le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $e_1 = (1, 1, 1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $e_3 = (1, 0, 1, 1)$  et  $u$  par le vecteur  $(1, 1, 1, 1)$ .

**Exercice 9.** Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

### Des exercices complémentaires plus difficiles

*Le niveau de difficulté est indiqué par une ou plusieurs étoiles*

**Exercice 10.** (\*\*) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer qu'une partie  $F$  de  $E$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  si et seulement s'il existe  $n - p$  formes linéaires indépendantes  $\ell_1, \dots, \ell_{n-p}$  telles que  $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} \text{Ker } \ell_i$ . (Penser au théorème de la base incomplète).

**Exercice 11.** (\*) On considère l'espace vectoriel  $E$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit  $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$\forall A \in E, \forall B \in E, \quad f(A, B) = \text{tr}(AB).$$

1. Montrer que  $f$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , non dégénérée. (Considérer pour cela les vecteurs de la base canonique de  $E$ ). On note  $q$  la forme quadratique associée à  $f$ .
2. Vérifier que les ensembles  $F = \{A \in E, {}^tA = A\}$  et  $G = \{A \in E, {}^tA = -A\}$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  et que  $E = F \oplus G$ .
3. Montrer que la restriction de  $q$  à  $F$  est définie positive, que la restriction de  $q$  à  $G$  est définie négative et que  $F^\perp = G$ , (penser aux propriétés de l'application  $\text{tr}$  par rapport à la transposition et aux produits de matrices).
4. En déduire la signature de la forme quadratique  $q$ .

**Exercice 12.** (\*\*) Reprendre l'exercice précédent en remplaçant  $E$  par l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels,  $n$  étant un entier  $\geq 2$ .