

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 3

Produits scalaires euclidiens et transformations orthogonales

**Exercice 1.** Soit  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . À chaque  $y$  appartenant à  $\mathbb{R}^3$ , on fait correspondre  $\ell_y$  où  $\ell_y(x) = \langle x, y \rangle$ .

1. Vérifier que pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\ell_y$  est linéaire.
2. Montrer que  $(b_1, b_2, b_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si les applications linéaires  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  sont indépendantes dans le dual de  $\mathbb{R}^3$ . On peut le faire directement ou en comparant la matrice de passage de la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $(b_1, b_2, b_3)$  et celle de la base canonique  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  du dual de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ .

**Exercice 2.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbb{R}^n$  soit la somme directe de  $F$  et  $G$ .

1. Montrer que si  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $p^2 = p$ .
2. Réciproquement, montrer que si  $p$  est linéaire, non nulle et vérifie  $p^2 = p$ , alors  $\mathbb{R}^n$  est la somme directe de  $\text{Im } p$  et de  $\text{Ker } p$ .
3. On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique. Soit  $p$  une application linéaire non nulle. Montrer que  $p$  est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , si et seulement si  $p^2 = p$  et  $p^* = p$ .

**Exercice 3.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbb{R}^n$  soit la somme directe de  $F$  et  $G$ .

1. Montrer que si  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $s^2 = \text{Id}$ .
2. Réciproquement, montrer que si  $s$  est linéaire différente de l'identité et vérifie  $s^2 = \text{Id}$ , alors  $s$  est une symétrie.
3. On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique. Soit  $s$  une application linéaire différente de l'identité. Montrer que  $s$  est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , si et seulement si  $s^2 = \text{Id}$  et  $s^* = s$ .

**Exercice 4.** Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique, telles que, pour tout  $x$  et  $y$ ,  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont linéaires.

Isométries en dimension 2 et 3

**Exercice 5.**

1. Dans  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire euclidien, on considère la symétrie orthogonale  $s_1$  par rapport à la droite  $D_1$  engendrée par le vecteur  $u_1 = (1, 1)$ , la symétrie orthogonale  $s_2$  par rapport à la droite  $D_2$  engendrée par le vecteur  $u_2 = (0, 1)$ .
  - (a) Donner les matrices de  $s_1$  et  $s_2$  dans la base canonique.
  - (b) Caractériser géométriquement la transformation  $s_1 \circ s_2$ .
2. Plus généralement, soient  $u_1$  et  $u_2$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^2$ , soient  $s_1$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par  $u_1$ ,  $s_2$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par  $u_2$ . On pose  $\theta = \widehat{(u_1, u_2)}$ . Caractériser géométriquement la transformation  $s_1 \circ s_2$ .

**Exercice 6.** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on considère un vecteur non nul  $u$ . On note  $D$  la droite vectorielle engendrée par  $u$ ,  $\text{pr}_D$  la projection orthogonale sur  $D$ ,  $\text{pr}_{D^\perp}$  la projection orthogonale sur  $D^\perp$ ,  $s_D$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $D$ ,  $s_{D^\perp}$  la symétrie orthogonale par rapport au plan  $D^\perp$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^3$ , montrer que

$$\begin{aligned} \text{pr}_D(x) &= \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, & \text{pr}_{D^\perp}(x) &= x - \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, \\ s_D(x) &= -x + 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, & s_{D^\perp}(x) &= x - 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u. \end{aligned}$$

**Exercice 7.** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on considère un vecteur non nul  $u = (u_1, u_2, u_3)$ . On considère la matrice  $A := \text{Id} + 2^t U U$ , où  $U$  est la matrice qui représente le vecteur  $u$  dans la base canonique. Montrer que  $A$  est orthogonale et qu'elle représente dans la base canonique la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation  $\sum_{i=1}^3 u_i x_i = 0$ .

**Exercice 8.** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on considère l'endomorphisme  $f$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $f$  est une isométrie.
2. Montrer que  $F = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = -x\}$  est une droite vectorielle.
3. Déterminer  $F^\perp$ , puis donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  dont le premier vecteur est dans  $F$ . Écrire la matrice de  $f$  dans cette base. Conclusion?

**Exercice 9.** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on considère l'endomorphisme  $f$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $f$  est une isométrie.
2. Montrer que  $F = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = x\}$  est une droite vectorielle.
3. Déterminer  $F^\perp$ , puis donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  dont le premier vecteur est dans  $F$ . Écrire la matrice de  $f$  dans cette base. Décrire géométriquement la transformation  $f$ .

**Exercice 10.** *Produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique.*

Pour  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $y = (y_1, y_2, y_3)$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose :  $x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$ .

1. Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $x \wedge y$  est orthogonal à  $x$  et à  $y$ .
2. Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\|x \wedge y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$ . Interpréter géométriquement ce résultat.

**Exercice 11.** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel, soit  $u$  un vecteur unitaire. Soit  $\alpha$  un réel  $\in [-\pi, \pi]$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^3$ , on définit

$$f(x) = (1 - \cos \alpha) \langle u, x \rangle u + \cos(\alpha) x + \sin(\alpha) u \wedge x.$$

1. Montrer que  $f$  est une isométrie.
2. Soit  $v$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  unitaire et orthogonal à  $u$ . Vérifier que la base  $(u, v, u \wedge v)$  est orthonormée, puis donner la matrice de  $f$  dans cette base. Interpréter géométriquement le résultat.