Université de Nantes **Année 2004-2005**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 4
Barycentres et isométries affines

Exercice 1. Soit G le barycentre de $(A_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq n$ avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$ dans un espace affine E. On note $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ pour tout point M de E.
a) Montrer que $f(M) = f(G) - \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$.
b) Si G est l'isobarycentre, montrer que $\sum_{i=1}^n A_iM^2$ est minimal en G.

Exercice 2. Soit ABC un triangle équilatéral. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est constante quand M est à l'intérieur du triangle.

Exercice 3. Soit u un vecteur unitaire et D une droite affine de $\mathbb{R}^2$, t_u la translation de vecteur u et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $t_u \circ s_D = s_D \circ t_u$.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un rectangle du plan affine. Trouver $s_{AB} \circ s_{BC} \circ s_{CD} \circ s_{DA}$.

Exercice 5. Soit A, B, C trois points de l'espace affine de dimension 3, I, J et K les milieux respectifs de BC, CA et AB. Montrer que, quel que soit M, $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = 0$.

Exercice 6. Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace affine de dimension 3, I, J, K et L les projections orthogonales respectives de A sur le plan BCD, B sur le plan ACD, C sur le plan ABD et D sur le plan ABC.
a) Montrer que $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle + \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$.
b) En déduire que si $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{BD}$, alors $\overrightarrow{AD}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$,
c) Montrer que $(AI), (BJ), (CK)$ et (DL) sont concourantes si et seulement si (AB) est perpendiculaire à (CD), (AC) perpendiculaire à (BD) et (AD) est perpendiculaire à (BC).

Exercice 7. Soit D et D' deux droites non concourantes de l'espace affine de dimension 3.
a) Si elles sont parallèles, montrer qu'il existe une infinité de couples de points A et A' avec $A \in D$ et $A' \in D'$ tels que $(AA')//(MM')$ quand $M \in D$ et $M' \in D'$.
b) Si elles ne sont pas parallèles, montrer qu'il existe $A \in D$ et $A' \in D'$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à la direction de D et à celle de D'. Vérifier que ce couple qui rend minimal la distance d'un point de D à un point de D' est unique.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^2$ soit une droite affine D d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M = (x_0, y_0)$. Exprimer la distance de M à la droite D. Puis, si A, B, C sont trois points non alignés, montrer que $\{M \ : d(M, AB) = d(M, AC)\}$ est un couple de droites qui sont respectivement bissectrice intérieure et bissectrice extérieure de l'angle en A du triangle ABC. En déduire que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes, que la bissectrice intérieure d'un angle du triangle et les bissectrices extérieures des deux autres angles du triangle sont concourantes.

Exercice 9. Montrer que la composition de deux rotations de $\mathbb{R}^2$ est une rotation ou une translation..

Exercice 10. *Isométries du plan affine*
Reconnaître les applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par
a) $x' = 1/\sqrt{2}(x - y + 1 + \sqrt{2})$; $y' = 1/\sqrt{2}(x + y - 3 + 2\sqrt{2})$ On identifiera l'application linéaire associée, puis on cherchera le point fixe.

b) $x' = 1/5(-3x+4y+6)$: $y' = 1/5(4x+3\,y+22)$ On identifiera l'application linéaire associée, puis on fera un changement de base orthonormée qui donnera pour l'application linéaire associée une matrice diagonale.

Exercice 11. *Isométries de l'espace affine*
Reconnaître les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par
a) $x' = 1/3(-x + 2y + 2z - 4)$; $y' = 1/3(2x - y + 2z + 2)$; $z' = 1/3(2x + 2y - z + 2)$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera l'ensemble des points invariants, puis on prendra un nouveau repère orthonormé dont le premier axe est invariant par l'application et l'on montrera que l'application est une rotation.
b) $x' = -z + 1$; $y' = x$; $z' = y - 2$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera le point fixe, puis les vecteurs changés en leurs opposés. On prendra un nouveau repère orthonormé centré au point fixe et dont le premier axe a pour direction les vecteurs changés en leurs opposés. On en conclura que l'on a une symétrie rotation.
c) $x' = -z + 1$; $y' = -x$; $z' = y - 2$. On regardera l'application linéaire associée, on vérifiera qu'il n'y a pas de point fixe. On prendra un nouveau repère orthonormé dont les directions sont soit invariantes, soit changées en leurs opposées dans la transformation. On trouvera un vissage
d) $x' = 1/3(x - 2y + 2z + 6)$; $y' = 1/3(-2x + y + 2z)$; $z' = 1/3(2x + 2y + z)$. On regardera l'application linéaire associée, on vérifiera qu'il n'y a pas de point fixe, puis on prendra une base orthonormée dont le premier vecteur est invariant par l'application linéaire associée. On trouvera une symétrie translation
e) $x' = 1/3(x-2y+2z-6)$; $y' = 1/3(-2x+y+2z-6)$; $z' = 1/3(2x+2y+z+6)$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera les points fixes, puis on prendra une base orthonormée dont deux vecteurs sont invariants par l'application linéaire associée. On trouvera une symétrie.