Université de Nantes **Année 2004-2005**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 5

Exercice 1. On considère les coniques d'équations respectives

$$2\,x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 + 2\,x - 2\,y - 1 = 0\,, \tag{1}$$
$$xy + 3\,x + 5\,y - 3 = 0\,, \tag{2}$$
$$3\,x^2 + 6\,xy + 3\,y^2 - 8\,x + 8\,y + 4 = 0\,. \tag{3}$$

Dans chaque cas, donner une équation réduite, déterminer le centre éventuel.

Exercice 2.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé usuel $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad a > b\,.$$
Soit $M(x_0, y_0)$ un point de l'ellipse $\mathcal{E}$.
   (a) Écrire l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{E}$ au point M.
   (b) Soient H et H' les projetés orthogonaux des foyers F et F' sur la tangente $\mathcal{T}$. Montrer que $FH.FH' = b^2$. (On peut utiliser un des résultats de l'exercice 8 de la liste 4).
2. Montrer un résultat analogue pour l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé usuel $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 4\,x$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -1$ et le point F de coordonnées $(1, 0)$.
Soit $M(x_0, y_0)$ un point de la parabole $\mathcal{P}$.

1. Écrire l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{P}$ au point M.
2. Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$. Montrer que les droites $\mathcal{T}$ et HF sont perpendiculaires. En déduire que la droite $\mathcal{T}$ est la médiatrice des points H et F.