Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
Licence de Mathématiques
Géométrie euclidienne M32

Nom :
Prénom :
Groupe :

Contrôle continu du 26 octobre 2005
Durée 1h20

Le sujet est constitué de trois parties sur deux feuilles.
Les réponses à la première seront données sur la première feuille, à rendre avec la copie.

I

Cet exercice est noté sur 10 points. Une réponse juste donne un point, une réponse fausse donne moins un point, l'absence de réponse ne donne ni point négatif ni point positif. Un total négatif est ramené à zéro.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x,y) = y^2 + 2xy$. Sa forme polaire est $B((x,y),(x',y')) = xy' + yy' + yx'$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit ℓ_1, ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes sur E. La forme polaire de la forme quadratique $v \in E \to \ell_1(v)\ell_2(v)$ est la forme bilinéaire $(v,w) \in E \times E \to \ell_1(v)\ell_2(w)$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit B la forme bilinéaire définie sur l'espace $\mathbb{R}_5[X]$ des polynômes de degré au plus 5 par $B(P,Q) = \int_{-1}^{1}[P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)]dt$. La forme quadratique associée est $P \in \mathbb{R}_5[X] \to P^2(1) - P^2(-1)$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de l'espace E. Si A_1, A_2 sont les matrices respectives des formes quadratiques Q_1, Q_2 relativement à la base $\mathbf{b}$, la forme $Q_1 + Q_2$ a pour matrice $A_1 + A_2$ relativement à la base $\mathbf{b}$.

Vrai ☐ Faux ☐ Le rang d'une forme quadratique non nulle est au moins égal à 1.

Vrai ☐ Faux ☐ Le rang de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $Q(x,y,z) = yz - x^2$ est 2.

Vrai ☐ Faux ☐ Si la signature de Q est (n_1, n_2), la signature de la forme $-2Q$ est $(2n_2, 2n_1)$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x,y) = xy$. Le vecteur $v = (0,1)$ est orthogonal à lui même relativement à Q.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x,y) = x^2 - y^2$. Le vecteur $v = (1,1)$ est orthogonal à $w = (1,-1)$ relativement à Q.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit E un espace euclidien de dimension n. Une famille orthogonale de n vecteurs est une base de E.

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation.
En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

II

Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + xy + 2xz + z^2, \quad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

(**1**) Effectuer une réduction de Gauss de Q.

(**2**) Déterminer le rang et la signature de Q.

III

(**1**) Soit E un espace euclidien. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(**2**) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que

$$|3x + 2y + z| \leq \sqrt{\frac{34}{3}}.$$