UNIVERSITÉ DE NANTES
UFR Sciences et techniques
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
Licence de Mathématiques
Géométrie euclidienne M32

Examen du 11 janvier 2006
Durée 1h30

Le sujet est constitué de deux exercices

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

I

Soit $\mathbb{R}^2$ le plan euclidien et, pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction P_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$P_a(M) = x^2 + 2axy + y^2 + 4\sqrt{2}x, \quad M = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

où (x, y) sont les coordonnées du point M dans le repère canonique du plan $\mathbb{R}^2$.
On note par Q_a la forme quadratique constituée de ses termes de degré 2.

(**1**) Discuter suivant les valeurs de a le rang et la signature de la forme Q_a.

(**2**.a) Exprimer la forme quadratique Q_a dans des coordonnées relativement à la base (v_+, v_-) avec $v_\pm = (1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$.

(**2**.b) Déterminer le point C_a tel que P_a s'exprime relativement au repère cartésien centré en C_a et de directions (v_+, v_-) comme la somme de deux monômes non constants et d'une constante.

(**2**.c) Tracer la partie du plan d'équation $P_1(M) = 0$.

(**2**.d) Tracer la partie du plan d'équation $P_2(M) = 0$.

II

Si $\mathcal{F}$ est une partie de l'espace euclidien E, on note par $\Phi_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des isométries φ affines de l'espace E telle que $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, c'est à dire telle que $\varphi(e) \in \mathcal{F}$ pour tout $e \in \mathcal{F}$ et que pour tout $e' \in \mathcal{F}$ il existe $e \in \mathcal{F}$ vérifiant $\varphi(e) = e'$.

(**1**) Soit $\mathcal{K}$ la partie du plan euclidien

$$\mathcal{K} = \{A = (1, 1), B = (1, -1), C = (-1, -1), D = (-1, 1)\}.$$

(**1**.a) Soit O l'isobarycentre de A, B, C, D. Montrer que $\varphi(O) = O$ pour toute isométrie $\varphi \in \Phi_{\mathcal{K}}$.

(**1**.b) Montrer que $\Phi_{\mathcal{K}}$ contient 3 rotations non égales à l'identité. Donner pour chacune d'elle son centre et son angle.

(**1**.c) Montrer que $\Phi_{\mathcal{K}}$ contient 4 symétries dont on précisera les éléments géométriques.

(**1**.d) Donner la liste de tous les éléments de $\Phi_{\mathcal{K}}$.

(**2**) Soit $\mathcal{Z}$ la partie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{Z} = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{Z}\}.$$

(**2**.a) Décrire les éléments de $\Phi_{\mathcal{Z}}$ laissant fixe au moins un point de $\mathcal{Z}$.

(**2**.b) Décrire les éléments de $\Phi_{\mathcal{Z}}$ sans point fixe dans $\mathcal{Z}$.
