UNIVERSITÉ DE NANTES
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Mathématiques
Géométrie euclidienne
M23

Deuxième session
28 Juin 2006
Durée 1h30

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation.
En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

I

Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, la forme quadratique Q_a sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$Q_a(x, y) = x^2 + 2axy + 4y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Discuter suivant les valeurs de a la nature de la conique

$$C_{a,b} = \{Q_a(x, y) = a(a + 3)\}$$

Pour chacun des cas, on dessinera une conique, avec les axes de symétrie s'il en existe..

II

(**1**) Donner une base othogonale de $\mathbb{R}^2$ pour la forme quadratique Q_2 définie par

$$Q_2(u, v) = uv, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(**2**) Déterminer le rang et la signature de la forme quadratique Q_3 définie par

$$Q_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

III

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Si γ est une isométrie, on désigne sa partie vectorielle par $\overrightarrow{\gamma}$. Un demi-tour ρ est une rotation telle que la restriction de $\overrightarrow{\rho}$ au plan orthogonal de la direction de l'axe Δ de ρ soit l'homothétie de rapport -1. On ne considère que des rotations distinctes de Id.

(**1**) Soit $\overrightarrow{\gamma}$ une rotation non triviale et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{v})$ soit colinéaire à $\overrightarrow{v}$. Montrer que ou bien $\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ ou bien $\overrightarrow{\gamma}$ est un demi-tour et $\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

(**2**) Soient ρ, ρ' deux rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ d'axes respectifs Δ, Δ'.

(**2**.a) Si $\Delta = \Delta'$, montrer que $\rho \circ \rho' = \rho' \circ \rho$.

(**2**.b) Si ρ et ρ' sont des demi-tours, d'axes Δ et Δ' s'intersectant orthogonalement, montrer que $\rho \circ \rho' = \rho' \circ \rho$. Montrer en outre que $\rho \circ \rho'$ est un demi-tour, dont on précisera l'axe.