Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 1

Des exercices de révision.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Exprimer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(v) = 4v\}$. Montrer que
   (a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
   (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$. Retrouver le résultat en appliquant la formule de changement de base.

Exercice 2. Soit $E := \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$, définie par:

$$f(a\,X^2 + b\,X + c) = c\,X^2 + b\,X + a\,.$$

1. (a) Montrer que f est un isomorphisme.
   (b) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de E. Calculer A^2 et A^{-1}.
2. On considère l'application $g : E \longrightarrow E$, définie par:

$$\forall P \in E\,, \qquad g(P) = f(P) - P\,.$$

   (a) Montrer que g est linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de g et donner sa dimension.
   (c) Quelle est la dimension de l'image $\mathrm{Im} g$ de g? Donner une ou des équation(s) caractéristique(s) de $\mathrm{Im} g$.

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble E des applications linéaires $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les éléments de E sont appelés *formes linéaires* sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, non nulle, est de dimension 2.

2. Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'application $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in E\,, \qquad f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i\,.$$

   (a) Montrer que les f_i sont linéaires et qu'elles forment une base de E.

   (b) Pour $i = 1, 2, 3$, on considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définies pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x) &= x_1 + x_2 \\ \varphi_3(x) &= x_1 + x_3\,. \end{aligned}$$

   Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E.

Formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques : définition, changements de bases.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y) = x_1\,y_1 + 4\,x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + 2\,x_1\,y_3 + 2\,x_3\,y_1 + 3\,x_2\,y_3 + 3\,x_3\,y_2\,.$$

1. Vérifier que f est une forme bilinéaire symétrique. On note q la forme quadratique associée.

2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (-1, 1, 0), e'_3 = (-3, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, calculer $f(x, y)$ et $q(x)$ dans cette base.

4. Donner une base q-orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + 5\,x_2^2 + 54\,x_3^2 - 4\,x_1 x_2 + 14\,x_1 x_3 - 32\,x_2 x_3\,.$$

On désigne par f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y)$ dans cette base.

2. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (2, 1, 0), e'_3 = (-3, 2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, déterminer $q(x)$ dans cette base.

3. Déterminer l'orthogonal, pour la forme quadratique q, du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(-3, 2, 1)$.

Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 2

Deux exercices sur la dualité

Exercice 1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$f_1 := e_1\,, \quad f_2 := e_1 + e_2\,, \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3\,.$$

Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base et déterminer sa base duale.

Exercice 2. On considère les trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\ \ell_1(x) = x_1\,,\ \ell_2(x) = x_1 + x_2\,,\ \ell_3(x) = x_1 + x_2 + x_3\,.$$

Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la base de $\mathbb{R}^3$ dont c'est la base duale.

Formes quadratiques - Réduction de Gauss

Exercice 3. Pour a réel donné, on considère la forme quadratique q_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad q_a(x) = x_1^2 + 2a\,x_1\,x_2 + x_2^2\,.$$

1. Déterminer suivant les valeurs de a, le rang et la signature de q_a. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la forme bilinéaire symétrique f_a associée à q_a est un produit scalaire euclidien?
2. Déterminer une base de E q_a-orthogonale et écrire la matrice de q_a dans cette base.
3. Dans le cas $a = -1$, déterminer et dessiner l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0)$.

Exercice 4. On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\,.$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique.
2. Faire une réduction de Gauss de q.
3. Déterminer le rang et la signature de q.
4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$f_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,,\ f_2 := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\,,\ f_3 := \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\,.$$

   Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, exprimer $q(x)$ dans cette base.

Exercice 5.

1. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,.$$

   Déterminer le rang et la signature de q. Trouver une base q-orthogonale et écrire la matrice de q dans cette base.

2. Mêmes questions avec la fome quadratique définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,,.$$

Produits scalaires euclidiens

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall P \in E\ ,\ \forall Q \in E\,, \quad f(P,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que

$$\forall P \in E\ ,\ \forall Q \in E\,, \left(\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt\right)^2 \le \left(\int_0^1 P(t)^2\,dt\right)\left(\int_0^1 Q(t)^2\,dt\right)\,.$$

3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.
4. Déterminer l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur X^2.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall A \in E\ ,\ \forall B \in E\,, \quad f(A,B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{A \in E\ ,\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $F^\perp$.
3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère les deux vecteurs $b_1 = (1,-1,2)$, $b_2 = (2,1,-1)$, ainsi que le sous-espace vectoriel F engendré par ces deux vecteurs.

1. En utilisant la méthode de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (1,2,3)$ sur F.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant F par le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $b_1 = (1,1,1,0)$, $b_2 = (0,1,1,1)$, $b_3 = (1,0,1,1)$ et u par le vecteur $(1,1,1,1)$.

Exercice 9. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes.

Des exercices complémentaires plus difficiles

Le niveau de difficulté est indiqué par une ou plusieurs étoiles

Exercice 10. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de dimension p si et seulement s'il existe $n-p$ formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_{n-p}$ telles que $F = \bigcap\limits_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker} \ell_i$. (Penser au théorème de la base incomplète).

Exercice 11. (*) On considère l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall A \in E\ ,\ \forall B \in E\ , \quad f(A,B) = \operatorname{tr}(AB)\,.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E, non dégénérée. (Considérer pour cela les vecteurs de la base canonique de E). On note q la forme quadratique associée à f.
2. Vérifier que les ensembles $F = \{A \in E\ ,\ {}^tA = A\}$ et $G = \{A \in E\ ,\ {}^tA = -A\}$ sont deux sous-sepaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G$.
3. Montrer que la restriction de q à F est définie positive, que la restriction de q à G est définie négative et que $F^\perp = G$, (penser aux propriétés de l'application tr par rapport à la transposition et aux produits de matrices).
4. En déduire la signature de la forme quadratique q.

Exercice 12. (**) Reprendre l'exercice précédent en remplaçant E par l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, n étant un entier ≥ 2.

Exercice 13. (**) On désigne par E l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall P \in E\ ,\ \forall Q \in E\ , \quad f(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Pour tout entier $p \geq 0$, on considère le polynôme Q_p défini par :

$$Q_p(t) = \frac{1}{2^p\, p!}\, \frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p\,.$$

   (Pour $p = 0$, Q_0 est le polynôme constant égal à 1).

   Montrer que les polynômes Q_p sont orthogonaux deux à deux. Quelle est leur norme?

Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 3

Isométries en dimension 2 et 3

Exercice 1.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien, on considère la symétrie orthogonale s_1 par rapport à la droite D_1 engendrée par le vecteur $u_1 = (1,1)$, la symétrie orthogonale s_2 par rapport à la droite D_2 engendrée par le vecteur $u_2 = (0,1)$.
   (a) Donner les matrices de s_1 et s_2 dans la base canonique.
   (b) Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.
2. Plus généralement, soient u_1 et u_2 deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, soient s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_1, s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_2. On pose $\theta = \widehat{(u_1, u_2)}$. Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot , \cdot >$, on considère un vecteur non nul u. On note D la droite vectorielle engendrée par u, pr_D la projection orthogonale sur D, $\mathrm{pr}_{D^\perp}$ la projection orthogonale sur $D^\perp$, s_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, $s_{D^\perp}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $D^\perp$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, montrer que

$$\mathrm{pr}_D(x) = \frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,, \qquad \mathrm{pr}_{D^\perp}(x) = x - \frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,,$$
$$s_D(x) = -x + 2\,\frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,, \qquad s_{D^\perp}(x) = x - 2\,\frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,.$$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot , \cdot >$, on considère un vecteur $u = (u_1, u_2, u_3)$ de norme 1. On considère la matrice $A := \mathrm{Id} - 2\,U\,{}^tU$, où U est la matrice colonne qui représente le vecteur u dans la base canonique. Montrer que A est orthogonale et qu'elle représente dans la base canonique la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^3 u_i\, x_i = 0$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot , \cdot >$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \,,\, f(x) = -x\}$ est une droite vectorielle.
3. Déterminer $F^\perp$, puis donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est dans F. Écrire la matrice de f dans cette base. Conclusion?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot , \cdot >$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \,,\, f(x) = x\}$ est une droite vectorielle.
3. Déterminer $F^\perp$, puis donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est dans F. Écrire la matrice de f dans cette base. Décrire géométriquement la transformation f.

Exercice 6. Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

1. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y.
2. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, $\|x \wedge y\|^2 + < x, y >^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, soit u un vecteur unitaire. Soit α un réel $\in [-\pi, \pi]$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, on définit

$$f(x) = (1 - \cos\alpha) \, < u, x > \, u + \cos(\alpha)\, x + \sin(\alpha)\, u \wedge x\,.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ unitaire et orthogonal à v. Vérifier que la base $(u, v, u \wedge v)$ est orthonormée, puis donner la matrice de f dans cette base. Interpréter géométriquement le résultat.

Des exercices complémentaires

Exercice 8. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique noté $< \cdot, \cdot >$. Á chaque y appartenant à $\mathbb{R}^3$, on fait correspondre ℓ_y où $\ell_y(x) =< x, y >$.

1. Vérifier que pour tout y de $\mathbb{R}^3$, ℓ_y est linéaire.
2. Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si les applications linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^3$. On peut le faire directement ou en comparant la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ à la base (b_1, b_2, b_3) et celle de la base canonique (e_1^*, e_2^*, e_3^*) du dual de $\mathbb{R}^3$ à la base (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3).

Exercice 9. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n$ soit la somme directe de F et G.

1. Montrer que si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $p^2 = p$.
2. Réciproquement, montrer que si p est linéaire, non nulle et vérifie $p^2 = p$, alors $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de $\mathrm{Im}\, p$ et de $\mathrm{Ker}\ p$.
3. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit p une application linéaire non nulle. Montrer que p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si $p^2 = p$ et $p^* = p$.

Exercice 10. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n$ soit la somme directe de F et G.

1. Montrer que si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $s^2 = \mathrm{Id}$.
2. Réciproquement, montrer que si s est linéaire différente de l'identité et vérifie $s^2 = \mathrm{Id}$, alors s est une symétrie.
3. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit s une application linéaire différente de l'identité. Montrer que s est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}$ et $s^* = s$.

Exercice 11. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, telles que, pour tout x et y, $< f(x), y >=< x, g(y) >$. Montrer que f et g sont linéaires.

Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 4
Barycentres et applications affines

Exercice 1. Soient $A_1, \ldots, A_n$, n points de l'espace affine $\mathbb{R}^2$, et soit G le barycentre des points (A_i, α_i), avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.
Pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, on note $f(M) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$.

1. Montrer que pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, $f(M) = f(G) + (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \, \|\overrightarrow{MG}\|^2$.
2. Si G est l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_n$, montrer que l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$, admet un minimum en G.

Exercice 2. Soit A, B, C trois points de l'espace affine de dimension 3, I, J et K les milieux respectifs de BC, CA et AB. Montrer que, quelque soit M, $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x' = 1 - x, y' = 2 + 3\,y)$.

1. Montrer que f est affine. Déterminer le ou les points fixes éventuels de f. Construire géométriquement l'image par f d'un point quelconque M du plan.
2. Soit ABC un triangle du plan. Que peut-on dire de l'image du triangle ABC par f? Que peut-on dire de l'image par f de la médiane issue de A?
3. Quelle est l'image du cercle de centre $(1/2, -1)$ et de rayon 1 par f?

Exercice 4. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire et D une droite affine de $\mathbb{R}^2$, $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Exercice 5. Pour tout couple de points distincts (M, N) du plan affine $\mathbb{R}^2$, on note s_{MN} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (MN). Soit $ABCD$ un rectangle du plan affine.
Montrer que la transformation $s_{AB} \circ s_{BC} \circ s_{CD} \circ s_{DA}$ est une translation, dont on déterminera le vecteur associé.

Exercice 6. Montrer que la composition de deux rotations (affines) de $\mathbb{R}^2$ est une rotation ou une translation.

Exercice 7. Soit A et B deux points distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soit M un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour tout point H de la droite (AB), on a $\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que la distance du point M à la droite (AB) est égale à $\left\| \overrightarrow{MA} \wedge \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right\|$.
3. Dans le plan affine, soit D la droite affine d'équation $ax + by + c = 0$. En utilisant le résultat précédent, exprimer la distance d'un point $M = (x_0, y_0)$ à la droite D.

Exercice 8. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, soit ABC un triangle équilatéral.

1. Montrer que l'isobarycentre G des points A, B et C est le point d'intersection des hauteurs.
2. Soit M un point à l'intérieur du triangle. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est égale à la somme des distances de G aux trois côtés du triangle.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^2$ soit une droite affine D d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M = (x_0, y_0)$. Exprimer la distance de M à la droite D. Puis, si A, B, C sont trois points non alignés, montrer que $\{M : d(M, AB) = d(M, AC)\}$, est un couple de droites qui sont respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle en A du triangle ABC. En déduire que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes, que la bissectrice intérieure d'un angle du triangle et les bissectrices extérieures des deux autres angles du triangle sont concourantes.

Exercice 10. Soit D et D' deux droites non concourantes de l'espace affine de dimension 3.
a) Si elles sont parallèles, montrer qu'il existe une infinité de couples de points A et A' avec $A \in D$ et $A' \in D'$ tels que $\|\overrightarrow{AA'}\| \leq \|\overrightarrow{MM'}\|$, pour tout $M \in D$ et tout $M' \in D'$.
b) Si elles ne sont pas parallèles, montrer qu'il existe $A \in D$ et $A' \in D'$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à la direction de D et à celle de D'. Vérifier que ce couple qui rend minimal la distance d'un point de D à un point de D' est unique.

Exercice 11. Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace affine de dimension 3, I, J, K et L les projections orthogonales respectives de A sur le plan BCD, B sur le plan ACD, C sur le plan ABD et D sur le plan ABC.
a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
b) En déduire que si AB est perpendiculaire à CD et AC perpendiculaire à BD, alors AD est perpendiculaire à BC.
c) Montrer que AI, BJ, CK et DL sont concourantes si et seulement si AB est perpendiculaire à CD, AC perpendiculaire à BD et AD est perpendiculaire à BC.

Exercice 12. *Isométries du plan affine.*
Reconnaître les applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par
a) $x' = 1/\sqrt{2}(x - y + 1 + \sqrt{2})$; $y' = 1/\sqrt{2}(x + y - 3 + 2\sqrt{2})$. On identifiera l'application linéaire associée, puis on cherchera le point fixe.
b) $x' = 1/5(-3x + 4y + 6)$; $y' = 1/5(4x + 3y + 22)$ On identifiera l'application linéaire associée, puis on fera un changement de base orthonormée qui donnera pour l'application linéaire associée une matrice diagonale.

Exercice 13. *Isométries de l'espace affine.*
Reconnaître les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par
a) $x' = 1/3(-x + 2y + 2z - 4)$; $y' = 1/3(2x - y + 2z + 2)$; $z' = 1/3(2x + 2y - z + 2)$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera l'ensemble des points invariants, puis on prendra un nouveau repère orthonormé dont le premier axe est invariant par l'application et l'on montrera que l'application est une rotation.
b) $x' = -z + 1$; $y' = x$; $z' = y - 2$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera le point fixe, puis les vecteurs changés en leurs opposés. On prendra un nouveau repère orthonormé centré au point fixe et dont le premier axe a pour direction les vecteurs changés en leurs opposés. On en conclura que l'on a une symétrie rotation.
c) $x' = -z + 1$; $y' = -x$; $z' = y - 2$. On regardera l'application linéaire associée, on vérifiera qu'il n'y a pas de point fixe. On prendra un nouveau repère orthonormé dont les directions sont soit invariantes, soit changées en leurs opposées dans la transformation. On trouvera un vissage.
d) $x' = 1/3(x - 2y + 2z + 6)$; $y' = 1/3(-2x + y + 2z)$; $z' = 1/3(2x + 2y + z)$. On regardera l'application linéaire associée, on vérifiera qu'il n'y a pas de point fixe, puis on prendra une base orthonormée dont le premier vecteur est invariant par l'application linéaire associée. On trouvera un symétrie translation.
e) $x' = 1/3(x - 2y + 2z - 6)$; $y' = 1/3(-2x + y + 2z - 6)$; $z' = 1/3(2x + 2y + z + 6)$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera les points fixes, puis on prendra une base orthonormée dont deux vecteurs sont invariants par l'application linéaire associée. On trouvera une symétrie.