Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 2

Deux exercices sur la dualité

Exercice 1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$f_1 := e_1\,, \quad f_2 := e_1 + e_2\,, \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3\,.$$

Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base et déterminer sa base duale.

Exercice 2. On considère les trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\ \ell_1(x) = x_1\,,\ \ell_2(x) = x_1 + x_2\,,\ \ell_3(x) = x_1 + x_2 + x_3\,.$$

Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la base de $\mathbb{R}^3$ dont c'est la base duale.

Formes quadratiques - Réduction de Gauss

Exercice 3. Pour a réel donné, on considère la forme quadratique q_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad q_a(x) = x_1^2 + 2a\,x_1\,x_2 + x_2^2\,.$$

1. Déterminer suivant les valeurs de a, le rang et la signature de q_a. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la forme bilinéaire symétrique f_a associée à q_a est un produit scalaire euclidien?
2. Déterminer une base de E q_a-orthogonale et écrire la matrice de q_a dans cette base.
3. Dans le cas $a = -1$, déterminer et dessiner l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0)$.

Exercice 4. On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\,.$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique.
2. Faire une réduction de Gauss de q.
3. Déterminer le rang et la signature de q.
4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$f_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,,\ f_2 := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\,,\ f_3 := \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\,.$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, exprimer $q(x)$ dans cette base.

Exercice 5.

1. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,.$$

   Déterminer le rang et la signature de q. Trouver une base q-orthogonale et écrire la matrice de q dans cette base.

2. Mêmes questions avec la fome quadratique définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \;(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,,.$$

Produits scalaires euclidiens

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall P \in E\ ,\ \forall Q \in E\,, \quad f(P,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que

$$\forall P \in E\ ,\ \forall Q \in E\,, \left(\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 P(t)^2\,dt\right)\left(\int_0^1 Q(t)^2\,dt\right)\,.$$

3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.
4. Déterminer l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur X^2.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall A \in E\ ,\ \forall B \in E\,, \quad f(A,B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{A \in E\ ,\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $F^\perp$.
3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère les deux vecteurs $b_1 = (1,-1,2)$, $b_2 = (2,1,-1)$, ainsi que le sous-espace vectoriel F engendré par ces deux vecteurs.

1. En utilisant la méthode de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (1,2,3)$ sur F.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant F par le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $b_1 = (1,1,1,0)$, $b_2 = (0,1,1,1)$, $b_3 = (1,0,1,1)$ et u par le vecteur $(1,1,1,1)$.

Exercice 9. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes.

Des exercices complémentaires plus difficiles

Le niveau de difficulté est indiqué par une ou plusieurs étoiles

Exercice 10. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de dimension p si et seulement s'il existe $n-p$ formes linéaires indépendantes $\ell_1, \ldots, \ell_{n-p}$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker} \ell_i$. (Penser au théorème de la base incomplète).

Exercice 11. (*) On considère l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall A \in E\ ,\ \forall B \in E\ , \quad f(A,B) = \operatorname{tr}(AB)\,.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E, non dégénérée. (Considérer pour cela les vecteurs de la base canonique de E). On note q la forme quadratique associée à f.
2. Vérifier que les ensembles $F = \{A \in E\ ,\ {}^tA = A\}$ et $G = \{A \in E\ ,\ {}^tA = -A\}$ sont deux sous-sepaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G$.
3. Montrer que la restriction de q à F est définie positive, que la restriction de q à G est définie négative et que $F^\perp = G$, (penser aux propriétés de l'application tr par rapport à la transposition et aux produits de matrices).
4. En déduire la signature de la forme quadratique q.

Exercice 12. (**) Reprendre l'exercice précédent en remplaçant E par l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, n étant un entier ≥ 2.

Exercice 13. (**) On désigne par E l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall P \in E\ ,\ \forall Q \in E\ , \quad f(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Pour tout entier $p \geq 0$, on considère le polynôme Q_p défini par :

$$Q_p(t) = \frac{1}{2^p\,p!}\,\frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p\,.$$

   (Pour $p = 0$, Q_0 est le polynôme constant égal à 1).

   Montrer que les polynômes Q_p sont orthogonaux deux à deux. Quelle est leur norme?