Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 3

Isométries en dimension 2 et 3

Exercice 1.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien, on considère la symétrie orthogonale s_1 par rapport à la droite D_1 engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 1)$, la symétrie orthogonale s_2 par rapport à la droite D_2 engendrée par le vecteur $u_2 = (0, 1)$.
   (a) Donner les matrices de s_1 et s_2 dans la base canonique.
   (b) Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.
2. Plus généralement, soient u_1 et u_2 deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, soient s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_1, s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_2. On pose $\theta = (\widehat{u_1, u_2})$. Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère un vecteur non nul u. On note D la droite vectorielle engendrée par u, pr_D la projection orthogonale sur D, $\mathrm{pr}_{D^\perp}$ la projection orthogonale sur $D^\perp$, s_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, $s_{D^\perp}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $D^\perp$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, montrer que

$$\mathrm{pr}_D(x) = \frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,, \qquad \mathrm{pr}_{D^\perp}(x) = x - \frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,,$$
$$s_D(x) = -x + 2\,\frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,, \qquad s_{D^\perp}(x) = x - 2\,\frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,.$$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère un vecteur $u = (u_1, u_2, u_3)$ de norme 1. On considère la matrice $A := \mathrm{Id} - 2\,U\,{}^tU$, où U est la matrice colonne qui représente le vecteur u dans la base canonique. Montrer que A est orthogonale et qu'elle représente dans la base canonique la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{3} u_i\, x_i = 0$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3\,,\, f(x) = -x\}$ est une droite vectorielle.
3. Déterminer $F^\perp$, puis donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est dans F. Écrire la matrice de f dans cette base. Conclusion?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \, , \, f(x) = x\}$ est une droite vectorielle.
3. Déterminer $F^\perp$, puis donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est dans F. Écrire la matrice de f dans cette base. Décrire géométriquement la transformation f.

Exercice 6. Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

1. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y.
2. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, $\|x \wedge y\|^2 + < x, y >^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, soit u un vecteur unitaire. Soit α un réel $\in [-\pi, \pi]$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, on définit

$$f(x) = (1 - \cos\alpha) \, < u, x > \, u + \cos(\alpha) \, x + \sin(\alpha) \, u \wedge x \, .$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ unitaire et orthogonal à v. Vérifier que la base $(u, v, u \wedge v)$ est orthonormée, puis donner la matrice de f dans cette base. Interpréter géométriquement le résultat.

Des exercices complémentaires

Exercice 8. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique noté $< \cdot, \cdot >$. Á chaque y appartenant à $\mathbb{R}^3$, on fait correspondre ℓ_y où $\ell_y(x) =< x, y >$.

1. Vérifier que pour tout y de $\mathbb{R}^3$, ℓ_y est linéaire.
2. Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si les applications linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^3$. On peut le faire directement ou en comparant la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ à la base (b_1, b_2, b_3) et celle de la base canonique (e_1^*, e_2^*, e_3^*) du dual de $\mathbb{R}^3$ à la base (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3).

Exercice 9. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n$ soit la somme directe de F et G.

1. Montrer que si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $p^2 = p$.
2. Réciproquement, montrer que si p est linéaire, non nulle et vérifie $p^2 = p$, alors $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de $\mathrm{Im}\, p$ et de $\mathrm{Ker}\, p$.
3. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit p une application linéaire non nulle. Montrer que p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si $p^2 = p$ et $p^* = p$.

Exercice 10. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n$ soit la somme directe de F et G.

1. Montrer que si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $s^2 = \mathrm{Id}$.
2. Réciproquement, montrer que si s est linéaire différente de l'identité et vérifie $s^2 = \mathrm{Id}$, alors s est une symétrie.
3. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit s une application linéaire différente de l'identité. Montrer que s est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}$ et $s^* = s$.

Exercice 11. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, telles que, pour tout x et y, $< f(x), y > = < x, g(y) >$. Montrer que f et g sont linéaires.