Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 4
Barycentres et applications affines

Exercice 1. Soient $A_1, \ldots, A_n$, n points de l'espace affine $\mathbb{R}^2$, et soit G le barycentre des points (A_i, α_i), avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.
Pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, on note $f(M) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$.

1. Montrer que pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, $f(M) = f(G) + (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \, \|\overrightarrow{MG}\|^2$.
2. Si G est l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_n$, montrer que l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$, admet un minimum en G.

Exercice 2. Soit A, B, C trois points de l'espace affine de dimension 3, I, J et K les milieux respectifs de BC, CA et AB. Montrer que, quelque soit M, $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x' = 1 - x, y' = 2 + 3\,y)$.

1. Montrer que f est affine. Déterminer le ou les points fixes éventuels de f. Construire géométriquement l'image par f d'un point quelconque M du plan.
2. Soit ABC un triangle du plan. Que peut-on dire de l'image du triangle ABC par f? Que peut-on dire de l'image par f de la médiane issue de A?
3. Quelle est l'image du cercle de centre $(1/2, -1)$ et de rayon 1 par f?

Exercice 4. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire et D une droite affine de $\mathbb{R}^2$, $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Exercice 5. Pour tout couple de points distincts (M, N) du plan affine $\mathbb{R}^2$, on note s_{MN} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (MN). Soit $ABCD$ un rectangle du plan affine.
Montrer que la transformation $s_{AB} \circ s_{BC} \circ s_{CD} \circ s_{DA}$ est une translation, dont on déterminera le vecteur associé.

Exercice 6. Montrer que la composition de deux rotations (affines) de $\mathbb{R}^2$ est une rotation ou une translation.

Exercice 7. Soit A et B deux points distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soit M un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour tout point H de la droite (AB), on a $\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que la distance du point M à la droite (AB) est égale à $\left\| \overrightarrow{MA} \wedge \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right\|$.
3. Dans le plan affine, soit D la droite affine d'équation $ax + by + c = 0$. En utilisant le résultat précédent, exprimer la distance d'un point $M = (x_0, y_0)$ à la droite D.

Exercice 8. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, soit ABC un triangle équilatéral.

1. Montrer que l'isobarycentre G des points A, B et C est le point d'intersection des hauteurs.
2. Soit M un point à l'intérieur du triangle. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est égale à la somme des distances de G aux trois côtés du triangle.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^2$ soit une droite affine D d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M = (x_0, y_0)$. Exprimer la distance de M à la droite D. Puis, si A, B, C sont trois points non alignés, montrer que $\{M : d(M, AB) = d(M, AC)\}$, est un couple de droites qui sont respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle en A du triangle ABC. En déduire que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes, que la bissectrice intérieure d'un angle du triangle et les bissectrices extérieures des deux autres angles du triangle sont concourantes.

Exercice 10. Soit D et D' deux droites non concourantes de l'espace affine de dimension 3.
a) Si elles sont parallèles, montrer qu'il existe une infinité de couples de points A et A' avec $A \in D$ et $A' \in D'$ tels que $\|\overrightarrow{AA'}\| \leq \|\overrightarrow{MM'}\|$, pour tout $M \in D$ et tout $M' \in D'$.
b) Si elles ne sont pas parallèles, montrer qu'il existe $A \in D$ et $A' \in D'$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à la direction de D et à celle de D'. Vérifier que ce couple qui rend minimal la distance d'un point de D à un point de D' est unique.

Exercice 11. Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace affine de dimension 3, I, J, K et L les projections orthogonales respectives de A sur le plan BCD, B sur le plan ACD, C sur le plan ABD et D sur le plan ABC.
a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
b) En déduire que si AB est perpendiculaire à CD et AC perpendiculaire à BD, alors AD est perpendiculaire à BC.
c) Montrer que AI, BJ, CK et DL sont concourantes si et seulement si AB est perpendiculaire à CD, AC perpendiculaire à BD et AD est perpendiculaire à BC.

Exercice 12. *Isométries du plan affine.*
Reconnaître les applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par
a) $x' = 1/\sqrt{2}(x - y + 1 + \sqrt{2})$; $y' = 1/\sqrt{2}(x + y - 3 + 2\sqrt{2})$. On identifiera l'application linéaire associée, puis on cherchera le point fixe.
b) $x' = 1/5(-3x + 4y + 6)$; $y' = 1/5(4x + 3y + 22)$ On identifiera l'application linéaire associée, puis on fera un changement de base orthonormée qui donnera pour l'application linéaire associée une matrice diagonale.

Exercice 13. *Isométries de l'espace affine.*
Reconnaître les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par
a) $x' = 1/3(-x + 2y + 2z - 4)$; $y' = 1/3(2x - y + 2z + 2)$; $z' = 1/3(2x + 2y - z + 2)$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera l'ensemble des points invariants, puis on prendra un nouveau repère orthonormé dont le premier axe est invariant par l'application et l'on montrera que l'application est une rotation.
b) $x' = -z + 1$; $y' = x$; $z' = y - 2$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera le point fixe, puis les vecteurs changés en leurs opposés. On prendra un nouveau repère orthonormé centré au point fixe et dont le premier axe a pour direction les vecteurs changés en leurs opposés. On en conclura que l'on a une symétrie rotation.
c) $x' = -z + 1$; $y' = -x$; $z' = y - 2$. On regardera l'application linéaire associée, on vérifiera qu'il n'y a pas de point fixe. On prendra un nouveau repère orthonormé dont les directions sont soit invariantes, soit changées en leurs opposées dans la transformation. On trouvera un vissage.
d) $x' = 1/3(x - 2y + 2z + 6)$; $y' = 1/3(-2x + y + 2z)$; $z' = 1/3(2x + 2y + z)$. On regardera l'application linéaire associée, on vérifiera qu'il n'y a pas de point fixe, puis on prendra une base orthonormée dont le premier vecteur est invariant par l'application linéaire associée. On trouvera un symétrie translation.
e) $x' = 1/3(x - 2y + 2z - 6)$; $y' = 1/3(-2x + y + 2z - 6)$; $z' = 1/3(2x + 2y + z + 6)$. On regardera l'application linéaire associée, on cherchera les points fixes, puis on prendra une base orthonormée dont deux vecteurs sont invariants par l'application linéaire associée. On trouvera une symétrie.