Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Maths Classiques
Module M62: fonctions de plusieurs variables

Contrôle continu du 24 mars 2005
Durée 2h
Aucun document autorisé

Exercice I

1) Soit $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$. Montrer que S_1 est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ et donner l'équation du plan tangent affine $\mathcal{T}_{(1,1,1)}S_1$ au point $(1, 1, 1)$.

2) Soit $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, xyz = 1\}$. Montrer que S_2 est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ et donner l'équation du plan tangent affine $\mathcal{T}_{(1,1,1)}S_2$ au point $(1, 1, 1)$.

3) Montrer que le sous-espace affine $\mathcal{T}_{(1,1,1)}S_1 \cap \mathcal{T}_{(1,1,1)}S_2$ est une droite et donner un vecteur directeur.

4) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$.

   i) Montrer que pour tout point (x_0, y_0, z_0) vérifiant $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, il existe U_0, V_0, W_0 voisinages respectifs de x_0, y_0, z_0 et deux fonctions $G : U_0 \to V_0$, $H : U_0 \to W_0$ de classe C^1 sur U_0 telles que:
   $$f(x, G(x), H(x)) = (0, 0),\ x \in U_0.$$

   ii) Calculer pour le point $(1, 1, 1)$, $G'(1)$ et $H'(1)$.

   iii) En déduire la tangente au point $(1, 1, 1)$ à la courbe paramétrée $x \in U_0 \to (x, G(x), H(x))$ et comparer avec le résultat de la question 3).

Exercice II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + a \sin y, y + b \sin x) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donner sa matrice jacobienne $Jac\, f(x, y)$.

2) Montrer que $Jac\, f(x, y)$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $|ab| < 1$.

3) Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ et telle que $|k'(u)| < 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $u \in \mathbb{R} \to u + k(u)$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|ab| < 1$ et soit $(t, z) \in \mathbb{R}^2$ fixés. Montrer qu'il existe un unique $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solution de l'équation $(t, z) = f(x, y)$.

5) En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $|ab| < 1$.