UNIVERSITÉ DE NANTES
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Mathématiques
Fonctions réelles de plusieurs variables
M62

Examen du 23 juin 2005 (deuxième session)
Durée 1h30

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation.
En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.
Aucun document autorisé

I

Énoncer de l'inégalité des accroissements finis (les hypothèses prises seront bien précisées).

II

Soit Φ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(x,y) = (y + \mathrm{e}^{xy}, x + \mathrm{e}^{-xy}), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**1**) Montrer que Φ est de classe C^1. Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}\,\Phi(x,y)$ de Φ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(**2**) Montrer que la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}\,\Phi(x,0)$ est inversible pour $x \geq 0$.

(**3**) Soit $a \geq 0$. Pour $A > 0$, soit $B_{a,A}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$B_{a,A} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2, |X-1| + |Y-1-a| < A\}.$$

Montrer qu'il existe $A > 0$ et une fonction différentiable $\Psi_{a,A}$ définie sur $B_{a,A}$ telle que

$$\Phi \circ \Psi_{a,A}(X,Y) = (X,Y), \quad (X,Y) \in B_{a,A}.$$

Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}\,\Psi_{a,A}(1, 1+a)$.

III

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction numérique F_λ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F_\lambda(x,y) = y(x^2 + y^2 - \lambda y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**1**) Déterminer les points critiques de F_0. Discuter si ce sont des minimum ou des maximum, stricts ou non.

(**2**) Soit $\lambda \neq 0$. Montrer que $F_\lambda(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 F_1(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle $DF_\lambda(\lambda x, \lambda y)$ en fonction de la différentielle $DF_1(x,y)$. En déduire que (x,y) est un point critique de F_1 si et seulement si $(\lambda x, \lambda y)$ est un point critique de F_λ.

(**3**) Déterminer les points critiques de F_1. Discuter si ce sont des minimum ou des maximum, stricts ou non.

(**4**) Reprendre la question précédente pour F_{-1}.

(**5**) Soit $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, F_1(x,y) = 0\}$. Tracer l'ensemble C_1 et déterminer les points $m = (x,y)$ où F_1 est régulière. Donner en un tel point régulier l'équation de la tangente à C_1.