Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Mathématiques
Fonctions réelles de plusieurs variables
M62

Interrogation écrite du 10 février 2005
Durée 1h

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation.
En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.
Aucun document autorisé

On rappelle la définition suivante : une fonction f définie sur un voisinage U de $m_0 \in \mathbb{R}^n$ admet une dérivée directionnelle $D_v f(m_0)$ au point m_0 et dans la direction $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si la fonction φ_v d'une variable $t \in \mathbb{R}$ définie au voisinage de $t = 0$ par

$$\varphi_v(t) = f(m_0 + tv)$$

est dérivable en $t = 0$. La dérivée directionnelle $D_v f(m_0)$ est définie par

$$D_v f(m_0) = \frac{d\varphi_v}{dt}(0).$$

I

Soit g une fonction différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$F(x, y, z) = (\mathrm{e}^{x-z}, \cos(y + z^2)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$G(u, v) = (g(u + v), g(u - v), g(uv)), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(**1**) Calculer les matrices jacobiennes des applications F et G en tout point de leur domaine de définition.

(**2**) Calculer la matrice jacobienne de l'application $F \circ G$ au point $(t, t) \in \mathbb{R}^2$.

II

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$H(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin(\sqrt{x^2 + 2y^2})}{\sqrt{2x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(**1**) Soit $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que H admet une dérivée directionnelle $D_v H$ en $(x, y) = (0, 0)$ suivant la direction v. Calculer $D_v H$.

(**2**) La fonction H est-elle différentiable en $(0, 0)$?