# Examen du 14 mai 2002



*Durée : 3 heures*

*Sont autorisées les notes de cours limitées à une feuille recto-verso, les calculettes ne sont pas autorisées.*

***La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.***

*Le sujet comprend deux pages.*

## Algèbre

Soit $n$ un entier au moins égal à 2 et soit $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels. La trace $\operatorname{tr}(A)$ d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n$ est définie comme le scalaire

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

(**1.a**) Soit $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$ (*i. e.* la matrice diagonale, avec des 1 sur la diagonale). Que vaut $\operatorname{tr}(I_n)$ ?

(**1.b**) Montrer que l'application $\operatorname{tr} : A \in \mathcal{M}_n \to \operatorname{tr}(A) \in \mathbb{R}$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$.

(**1.c**) L'application $tr : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

(**1.d**) Calculer $\operatorname{tr}(ST)$ et $\operatorname{tr}(TS)$ pour les matrices $S$ et $T$ définies par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

*Si $A$ et $B$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n$, l'égalité $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ sera admise dans la suite.*

(**2.a**) Soient $M$ et $N$ les matrices d'ordre 2 définies par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $MN - NM$.

(**2.b**) Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B$ carrées d'ordre $n$ telles que $AB - BA = I_n$.

(**2.c**) Montrer que si $AB - BA = A$ pour des matrices $A, B$ carrées d'ordre $n$, alors $A$ n'est pas inversible. *On pourra raisonner par l'absurde et introduire les matrices $A_1 = A$ et $B_1 = BA^{-1}$.*

(**3**) Soient $U$ et $V$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en somme directe et $\pi$ la projection sur $U$ parallèlement à $V$. On a donc $\pi(u + v) = u$ si $u \in U, v \in V$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $M_{\mathcal{B}_0}$ de $\pi$ relativement à la base $\mathcal{B}_0$ soit diagonale. Montrer alors que $\operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}_0}) = \operatorname{rang}(\pi)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $M_{\mathcal{B}}$ la représentation matricielle de $\pi$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}}) = \operatorname{rang}(\pi)$. *On pourra utiliser une matrice de changement de base.*

# Analyse

On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions $f$ et $g$ en posant $f(0) = g(0) = 0$, et pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \exp\Big( - x^2 - \frac{1}{x^2}\Big) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}\, f(x)\ .$$

(**1**) Montrer que les fonctions $f$ et $g$ sont continues en $x = 0$, et en déduire qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

(**2**) Montrer que pour tout $t > 1$, on a

$$\int_1^t f(x)\,dx = \int_{1/t}^1 g(y)\,dy \qquad \text{et} \qquad \int_1^t g(x)\,dx = \int_{1/t}^1 f(y)\,dy$$

(on pourra effectuer un changement de variable).

(**3**) En déduire que les deux intégrales généralisées

$$I = \int_0^{(\infty)} f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{(\infty)} g(x)\,dx$$

sont convergentes et vérifient $I = J = \int_0^1 \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$ (on pourra utiliser que $\int_0^t = \int_0^1 + \int_1^t$).

(**4**) Pour $x > 0$, on pose $h(x) = x - \frac{1}{x}$. Calculer $h(x)^2$, la dérivée $h'(x)$ et la limite $\lim_{x\to 0^+} h(x)$.

(**5**) On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_{(-\infty)}^0 e^{-x^2}\,dx$ est convergente, et on admettra ici que cette intégrale vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. En effectuant le changement de variable $y = h(x)$ dans l'intégrale $\int_t^1 \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$, où $t \in \,]0,1[$ , calculer la valeur commune de $I$ et $J$.