Examen du 24 juin 2002

Durée : 3 heures

Sont autorisées les notes de cours limitées à une feuille recto-verso, les calculettes ne sont pas autorisées.
La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

Le sujet comprend deux pages.

Algèbre

I

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et on rappelle que $(x^2, x, 1)$ en est une base.
On définit une application $f : E \to \mathbb{R}[x]$ en posant, pour tout polynôme $p \in E$, $f(p) = q$ où le polynôme q est défini par la formule

$$q(x) = (10 - x^2)\, p'(x) + 6 \int_0^x p(t)\, dt\ .$$

(**1**) Montrer que f est une application linéaire, et calculer les images par f des éléments de la base $(x^2, x, 1)$.

(**2**) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset E$, si bien que l'on peut considérer $f : E \to E$ comme un endomorphisme de E.

(**3**) Calculer la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(x^2, x, 1)$, puis calculer la matrice de l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ dans cette même base.

(**4**) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$, et en déduire sa dimension.

(**5**) On pose $p_1(x) = x^2 + 5\,x + 5$ et $p_2(x) = x^2 - 5\,x + 5$. Montrer que l'on peut choisir $p_0 \in \operatorname{Ker} f$ tel que $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ forme une base de E.

(**6**) Calculer la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$. On note $f^2 = f \circ f$, puis pour tout $n \geq 2$, $f^{n+1} = f^n \circ f$. Pour tout entier $n \geq 2$, calculer la matrice de l'endomorphisme f^n dans la base $\mathcal{B}$.

Analyse

I

L'exercice concerne l'étude de suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$(R) \qquad u_{n+1} = \frac{2^{u_n}}{n+1}\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Les raisonnements par récurrence seront rédigées soigneusement.

(1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant (R). Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$

(2) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant (R), supposée convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ell = 0$.

(3.a) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant (R) et $v_{N+1} \leq v_N$ pour un certain entier N. Montrer que

$$v_{n+1} \leq v_n \quad \text{pour tout } n \geq N\,.$$

Que peut-on dire de la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$?

(3.b) Montrer que la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ vérifiant (R) et telle que $t_0 = 2$ est divergente.

II

Soit G une fonction continue, décroissante, définie sur $[0,+\infty)$ et à valeurs dans l'ensemble des réels positifs. On introduit, pour n entier non nul, la série

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} G\,(k/n)\,,$$

et sa somme partielle d'indice p

$$S_n(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p} G\,(k/n)\,, \quad p \in \mathbb{N}\,.$$

(1) Montrer que

$$\frac{G\,((k+1)/n)}{n} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} G(x)dx \leq \frac{G\,(k/n)}{n}\,.$$

(2) Montrer que

$$S_n(p+1) - \frac{G(0)}{n} \leq \int_0^{(p+1)/n} G(x)dx \leq S_n(p)\,.$$

En déduire que la série S_n est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_0^{(\infty)} G(x)dx$ converge. Si l'intégrale converge, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^{(\infty)} G(x)dx\,.$$

(3) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$