Université de Nantes — **Département de Mathématiques**
DEUG MIAS - Module M2 Algèbre — **Année 2001/2002**

Liste d'exercices n° 1

Espaces vectoriels

1. Exercices fondamentaux

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

1. Montrer que l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Dans chacun des cas suivants dites, en justifiant votre réponse, si F_i est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de E_i, les divers espaces vectoriels E_i étant munis des opérations usuelles.

Si votre réponse est *non*, précisez cependant s'il y a stabilité pour l'une des deux opérations.

1. $E_1 = \mathbb{R}^3$; $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + 3y - 4z = 0\}$.
2. $E_2 = \mathbb{R}^3$; $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + 3y - 4z = 1\}$.
3. $E_3 = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $F_3 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ f(3) = 0\}$.
4. $E_4 = \mathbb{R}[X]$; $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ d^oP \leq 5\}$.

3.

1. Le vecteur $g = (2, 14, -34, 7)$ appartient-il au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $e_1 = (1, 4, -5, 2)$ et $e_2 = (1, 2, 3, 1)$?
2. Déterminer λ et μ de façon que le vecteur $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne au sous-espace engendré par $(1, 2, -5, 3)$ et $(2, -1, 4, 7)$.

4. On donne dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $u_1 = (2, 3, -1), u_2 = (1 - 1, -2), v_1 = (3, 7, 0), v_2 = (5, 0, -7)$.

1. Montrer que les deux sous-espaces engendrés par u_1 et u_2 d'une part et par v_1 et v_2 d'autre part sont identiques.
2. Déterminer $F_1 \cap F_2$, où $F_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $F_2 = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $u_1 = (4, 2, -5), u_2 = (-1, 3, 1), v_1 = (3, -4, 2)$ et $v_2 = (5, -2, 2)$.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = y = z\}$ et $E_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Familles libres, liées, génératrices et bases

6. Précisez la dépendance linéaire des familles de vecteurs suivantes en donnant, dans chaque cas, une relation de dépendance s'il en existe une ainsi qu'une sous-famille libre de cardinal maximal.

1. Dans $\mathbb{R}^2, (u, v, w)$ avec $u = (3, 2), v = (4, -1)$ et $w = (5, -2)$.
2. Dans $\mathbb{R}^4, (u, v, w)$ avec $u = (2, -1, 5, 7), v = (3, 1, 5, -2)$ et $w = (1, 1, 1, -4)$.
3. Dans $\mathbb{R}^4, (u, v, w, t)$ avec $u = (2, 0, 4, 2), v = (1, 2, -2, -3), w = (3, 1, 3, 4)$ et $t = (2, 4, 9, 5)$.
4. Dans $\mathbb{R}_3[X], (P, Q, R, S)$ avec $P = 3 + 3X + X^2 + X^3, Q = 1 - X - X^2 + X^3, R = -1 - X + X^2 + X^3$ et $S = 3 - 3X + X^2 + X^3$.

7.

1. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes forment ou non des bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} F_1 &= ((1, 1, 1), (1, 2, 3)) \\ F_2 &= ((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)) \end{aligned}$$

2. Même question dans $\mathbb{R}^4$:

$$F_1 = ((1, 2, 1, 2), (-2, -3, 0, -5), (4, 9, 6, 7), (1, -1, -5, 5)) .$$

3. Même question dans $\mathbb{R}_4[X]$:

$$F_1 = (1+X, 1+X^2, 1+X^3, 1+X^4)\,.$$

8. Dans cet exercice il s'agit, pour chacun des cas ci-dessous, de prouver que B est une base de l'espace vectoriel E, puis de calculer les coordonnées du vecteur u dans la base B.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $B = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$; $u = (a,b,c)$.
2. $E = \mathbb{C}^3$; $B = ((1,-1,i),(-1,i,1),(i,1,-1))$; $u = (1+i, 1-i, i)$.
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $B = (1+X+X^2+X^3, X+X^2+X^3, X^2+X^3, X^3)$; $u = a+bX+cX^2+dX^3$.

Espaces vectoriels de dimension finie

9.

1. Soient E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par $(2,2,1,0),(1,4,2,-1),(2,1,-1,0),(2,-5,4,2$
   et par $(2,1,4,5),(1,2,3,4)$.
   Déterminer les dimensions de $E, F, E+F, E\cap F$ en donnant une base de chacun d'eux.
2. Même question avec

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}((1,2,0,1),(2,1,3,1),(1,-4,6,-1))\,,\\ F &= \mathrm{Vect}((1,2,1,0),(-1,1,1,1),(2,-1,0,1),(2,2,2,2))\,. \end{aligned}$$

10. Soient P et Q les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\begin{aligned} P &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}\,,\\ Q &= \mathrm{Vect}(v_1=(2,-1,0), v_2=(-2,2,-1), v_3=(4,-1,-1))\,. \end{aligned}$$

1. Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces P et Q.
2. Soit $v=(x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x,y,z pour que v appartienne à Q.
3. Déterminer une base puis la dimension de $P\cap Q$ puis de $P+Q$.

2. Exercices complémentaires

11. Dans chacun des cas suivants dites, en justifiant votre réponse, si F_i est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de E_i, les divers espaces vectoriels E_i étant munis des opérations usuelles.

Si votre réponse est *non*, précisez cependant s'il y a stabilité pour l'une des deux opérations.

1. $E_1 = \mathbb{R}^3$; $F_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.
2. $E_2 = \mathbb{R}[X]$; $F_2 = \{P\in\mathbb{R}[X] \ ;\ d^oP = 5\}$.
3. $E_3 = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $F_3 = \{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ;\ f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f+f'=0\}$.

12. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Prouver que $E\setminus F$ n'est jamais un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner un exemple prouvant que $F\cup G$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer : ($F\cup G$ sous-espace vectoriel de E) $\iff$ ($F\subset G$ ou $G\subset F$).
4. Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel, au sens de l'inclusion, qui contient $F\cup G$.

13. Avec le moins de calculs possible, précisez si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées. Si la famille est liée, donner une relation de liaison.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, (u,v,w) avec $u=(1,7,2)$, $v=(2,-14,-4)$ et $w=(7,5,-3)$.
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, (u,v,w,t) avec $u=1, v=X, w=X^2$ et $t=a+bX+cX^2$.
3. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, (u,v,w,t) avec $u=1, v=1+X, w=1+X+X^2$ et $t=1+X+X^2+X^3$.
4. Dans $\mathbb{C}^3$, (u,v,w) avec $u=(1,0,1)$, $v=(1,j,j^2)$ et $w=(j,j^2,1)$.
5. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, (u,v,w) avec $u=\sin(x)$, $v=\cos(x)$, $w=\cos(x+\frac{\pi}{3})$.

14. Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, étudiez la liberté des familles suivantes :

1. (f,g,h) avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = \cos(2x)$.
2. (f,g,h) avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x, g(x) = \exp(x)$ et $h(x) = \exp(2x)$.
3. (f,g,h,k) avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x, g(x) = \ln(1+x^2), h(x) = x^3$ et $k(x) = \exp(x)$.

15.

1. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes forment ou non des bases de $\mathbb{R}^3$:
   $F_1 = ((1,1,1),(1,2,3),(1,1,a))$ où a est un paramètre réel.
   $F_2 = ((1,1,1),(1,a,a^2),(1,b,b^2))$ où a et b sont deux paramètres réels.
2. Même question dans $\mathbb{R}^4$:
   $F_2 = ((1,1,3,4),(-2,0,0,0),(2,4,1,1),(3,5,7,2))$
   $F_3 = ((1,a,1,b),(a,1,b,1),(1,c,1,d),(c,1,d,1))$ où a,b,c et d sont des paramètres réels.
3. Même question dans $\mathbb{R}_4[X]$:
   $F_2 = (1+X, 1+2X+X^2+2X^3+X^4, X^2+X^3+X^4, X^2+X^3+2X^4, 1+2X+2X^2+X^3+X^4)$

16. Soient U,V,W les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z)/2x+y+4z=0\}\ ;\ V = \{(x,y,z)/3x=5z\}, \\ W &= \{(x,y,z)/x=y=0\}. \end{aligned}$$

Déterminer une base de chacun de ces trois sous-espaces. Déterminer les trois sommes $U+V, U+W, V+W$, en précisant à chaque fois si la somme est directe.

17. Soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé par les vecteurs (a,b,c,d) qui vérifient : $b-2c+d=0$, et soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ formé par ceux qui vérifient $a=d$ et $b=2c$. Trouver une base et la dimension de U, puis compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Même question pour V, puis pour $U \cap V$.

18. Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle de la forme $x' + a(t)x = 0$ où a est une fonction continue est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.

Même question avec $x''(t) + a.x'(t) + b.x(t) = 0$ où a et b sont des réels.

19.

1. Montrer que $F = \mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$ dont on donnera la dimension ainsi qu'une base.
2. Montrer que l'ensemble G des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par $X(X-1)^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Donner la dimension et une base de G.
3. Montrer que $\mathbb{R}_5[X] = F \oplus G$.
4. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_5[X]$. Utiliser la division euclidienne pour reprouver directement qu'il existe un unique couple $(P_1,P_2) \in F \times G$ tel que $P = P_1 + P_2$.
5. Application numérique : $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.

3. Exercices d'entraînement

20. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, quels sont les sous-espaces vectoriels ?

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x+y=0\}$.
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x+y=1\}$.
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x+y \geq 0\}$.

21. Soient $u = (1,1,1), v = (0,-1,2), w = (1,-2,3)$ trois éléments du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille (u,v,w) est liée.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u,v,w). Donner une base de F.
3. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x+2y+z=0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G. Montrer que $F = G$.
   (Montrer correctement que $F \subset G$ et $G \subset F$)

22. Soient $u = (1, 2, 3)$ et $v = (6, 7, 8)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $E = \text{Vect}(u, v)$. Montrer que $B = (u, v)$ est une base de E.

Exprimer les coordonnées du vecteur $w = (4, 5, 6)$ de E dans la base B.

23. a_1, a_2, a_3 étant trois nombres réels deux à deux distincts, montrer que les polynômes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\phi_1(X) = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad \phi_2(X) = \frac{(X - a_3)(X - a_1)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)}, \quad \phi_3(X) = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

Décomposer tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ dans cette base, puis les polynômes $1, X$ et X^2.

24. Étant donnés n nombres réels deux à deux distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on note : $\pi_k(x) = \Pi_{p \neq k}(x - a_p)$ et

$$\phi_k(x) = \frac{\pi_k(x)}{\pi_k(a_k)} = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \ldots (x - a_n)}{(a_k - a_1)(a_k - a_2) \ldots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \ldots (a_k - a_n)}.$$

Vérifier que, k étant fixé, ϕ_k est un polynôme de degré $n - 1$, et que $\phi_k(a_p)$ vaut 1 si $k = p$ et 0 sinon.

1. Montrer que la famille $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ est libre dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a la relation : $P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)\phi_k$.
3. Étant donnés n nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (appelé polynôme d'interpolation de Lagrange) tel que pour tout k compris entre 1 et n, on ait : $P(a_k) = b_k$.

25. Soient a et b deux réels ($b \neq 0$), et E l'ensemble des suites réelles (u_n) qui vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.
2. Montrer que, si $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ sont deux suites de E telles que $v_0 = w_0$ et $v_1 = w_1$, alors $v = w$.
3. On définit $s = (s_n) =$ comme étant la suite de E telle que $s_0 = 0$ et $s_1 = 1$, puis $t = (t_n) =$ l'unique suite de E telle que $t_0 = 1$ et $t_1 = 0$. Montrer que (s, t) est une base de E.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a^2 + 4b \geq 0$ et que r est une racine du polynôme $X^2 - aX - b$.
4. On suppose que $a^2 + 4b > 0$. Montrer que la suite (r^n) appartient à E. Déterminer une nouvelle base de E, puis la forme générale des éléments de E.
5. On suppose que $a^2 + 4b = 0$. Montrer que les deux suites (r^n) et (nr^n) appartiennent à E. Déterminer alors la forme générale des éléments de E.
6. Application : déterminer le terme général de la suite (F_n), dite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = F_1 = 1, \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Liste d'exercices n° 2

Application linéaire. Noyau et image

1. Dans cet exercice, il s'agit de préciser, avec preuve à l'appui dans chaque cas, si l'application f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est linéaire ou non.

1. $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$.
2. $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.
3. $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}$; $f(x,y) = ax + by + c$; a, b et c réels.

2. Dans cet exercice, il s'agit de déterminer à chaque fois, le noyau et l'image de l'application linéaire f de E dans F, en donnant une base de chacun de ces sous-espaces. Dans chaque cas, précisez si f est injective, surjective, bijective ; quand f est bijective, donner sa bijection linéaire réciproque.

1. $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x,y)) = (x - y, x, x + y)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x,y,z)) = (y + z, z + x, x + y)$.
3. $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x,y)) = (2x + 3y, 3x + 10y)$.
4. $E = \mathbb{R}^4$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x,y,z,t)) = (3x - 4y + 2z - 5t, 3x - z + 2t)$.

3.

1. Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,((1,2,3,4),(0,1,1,1))$.
2. Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,((-1,1,0),(1,0,1))$.

4. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = P(2)$. Montrer que f est linéaire ; déterminer son image et son noyau.
2. Soit a et b deux réels distincts et f l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], f(P) = XP(a) + P(b)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$; déterminer son noyau et en donner une base ; déterminer son image et en donner une base.

5.

1. Montrer que si f est une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, son noyau est de dimension 3.
2. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (0,-1,1,1)$, $u_2 = (0,-3,-1,5)$ et $u_3 = (4,-1,-3,3)$.
   (a) Vérifier que H est de dimension 3.
   (b) Montrer qu'une application linéaire non nulle f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admet H pour noyau si et seulement si elle vérifie $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$ et $f(u_3) = 0$.
   (c) Déterminer toutes les applications linéaires f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admettant H pour noyau.

6. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que la famille $(f(u), f^2(u), f^3(u), \ldots, f^n(u))$ soit une base de E.

1. Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est aussi une base de E.
2. Montrer que f est bijectif.
3. Montrer qu'il existe n scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :

$$f^n(u) = a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(u)\,.$$

4. En déduire que : $f^n = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$.

7. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est à dire tels que $F_1 \oplus F_2 = E$.

On rappelle que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- $F_1 \oplus F_2 = E$
- $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$
- Pour tout vecteur u de E, il existe un unique couple (u_1, u_2) de vecteurs vérifiant :

$$u_1 \in F_1, u_2 \in F_2, u_1 + u_2 = u\,.$$

On notera

$$u_1 = p_1(u) = \text{"Projection de } u \text{ sur } F_1 \text{ parallèlement à } F_2\text{"}\,,$$
$$u_2 = p_2(u) = \text{"Projection de } u \text{ sur } F_2 \text{ parallèlement à } F_1\text{"}\,.$$

1. Montrer que p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1) = F_2$ et $\mathrm{Im}(p_1) = F_1$ (par raison de symétrie, on a bien sûr aussi $\mathrm{Ker}(p_2) = F_1$ et $\mathrm{Im}(p_2) = F_2$).
3. Montrer que : $v \in F_1 \Longleftrightarrow p_1(v) = v$.
4. Montrer que : $p_1 \circ p_2 = p_1$.

8. Plus généralement, un endomorphisme p de E est appelé *projecteur* si et seulement si $p \circ p = p$.

1. Montrer que : p projecteur de $E \Longleftrightarrow (Id_E - p)$ projecteur de E.
2. Si p est un projecteur, montrer que :
   - $\mathrm{Im}(Id_E - p) = \mathrm{Ker}(p)$
   - $\mathrm{Ker}(Id_E - p) = \mathrm{Im}(p)$
   - $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
   - p est la projection vectorielle de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
3. Soit p un projecteur et u un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
   - $p \circ u = u \circ p$,
   - $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.
4. Soit p et q deux projecteurs de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(p+q)$ soit aussi un projecteur.

9. *Lemme de **Schur***

Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie vectorielle (*i.e.* $\exists \lambda \in K$, $f = \lambda Id_E$).

10. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E

1. Soit E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E (*i.e.* $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$). Prouvez que : $f \circ p = p \circ f \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.
2. On appelle centre de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, o)$ l'ensemble des $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), f \circ h = h \circ f\,,$$

   Montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est réduit aux homothéties (*i.e.* $\lambda Id_E, \lambda \in K$).

11. Soit E un K-espace vectoriel. On se pose la question de savoir si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

1. Montrez que si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire H stable par f (*i.e.* $f(H) \subset H$) alors $H = \mathrm{Im}(f)$.
2. Prouvez un résultat analogue pour $\mathrm{Im}(f)$.
3. Prouvez que : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
4. Prouvez que : $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
5. Si f est un endomorphisme de E, a-t-on $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$?

Liste d'exercices n° 3

1. Déterminer tous les produits possibles de deux matrices (y compris les carrés) parmi les matrices suivantes puis les inverses de ces matrices lorsqu'elles sont inversibles (on pourra utiliser les calculs effectués) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Même question avec les matrices transposées ${}^tA,{}^t B,{}^t C,{}^t D,{}^t E$.

2. Soient les applications linéaires $f \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ et $g \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$ définies par :

$$f((x,y,z)) = (x+2y+3z, y+2z) , \qquad g((x,y)) = (x-y, x-2y, x-3y) .$$

1. Donner, dans les bases canoniques $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice M de f et celle N de g.
2. (a) Calculer la matrice A de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{C}$ et celle D de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire l'expression de $(g \circ f)((x,y,z))$ et de $(f \circ g)((x,y))$ à l'aide de A et D. Faire la vérification.
3. Justifier que le rang de f et celui de g ne peuvent pas dépasser 2 avant de calculer ces rangs explicitement. Mêmes questions avec le rang de $f \circ g$ et celui de $g \circ f$.
4. (a) Parmi les applications linéaires $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$, préciser, en justifiant, celles qui sont susceptibles d'être injectives, surjectives, puis bijectives.
   (b) Pour chacune de ces applications, déterminer son noyau et son image.
   (c) $g \circ f$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer la matrice de son inverse dans la base canonique.

3. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3), f((x,y,z)) = (y-z, z-x, x-y)$.

1. Trouver sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
2. Soit la nouvelle base $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ avec $c_1 = e_1, c_2 = e_1 + e_2, c_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
   Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. En déduire à l'aide de P et A, la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$. Faire la vérification.

4. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\},\ c_1 = e_2 + e_3, c_2 = e_1 + e_3, c_3 = e_1 + e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice B de f dans cette base.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer B^n et en déduire A^n.
3. On considère trois suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n, y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n$ et $z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$.
   Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

5. Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 3.
On définit l'application $f :\ E \rightarrow E$ par $f(p) = (x^2-1)p'' + 2xp'$.

1. Vérifier que f est linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

2. Calculer le rang de f et trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une de $\mathrm{Im}(f)$.
3. (a) Vérifier que, pour tout $j = 0, \ldots, 3$ il existe un unique polynôme unitaire p_j de degré j et un unique réel λ_j tel que $f(p_j) = \lambda_j p_j$.
   (b) Justifier que $\mathcal{C} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est une base de E et donner la matrice D de f dans cette base.
   Calculer D^n et en déduire A^n, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.

1. Calculer le rang de $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les itérés de N, N^n.
3. Si $u \in L(\mathbb{R}^3)$ est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique N, prouver E est somme directe de son noyau et de son image.

7. Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3, u \in L(\mathbb{R}^3)$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3, \mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

1. (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. En déduire que la restriction v de u à son image , $v = u_{|\mathrm{Im}(u)} : \mathrm{Im}(u) \to \mathrm{Im}(u)$, est une application linéaire bijective.
2. Soit p la projection linéaire sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$. Trouver sa matrice Q dans la base canonique. En déduire que $u = \alpha p$, où α est un réel que l'on déterminera.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer u^n à l'aide de la question 2.
   Faire la vérification en calculant par récurrence A^n.
4. Soit $\mathcal{C}_0$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathcal{C}_1$ une base de $\mathrm{Im}(u)$. Justifier que $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice M de u dans cette base.

8. Calculer en fonction du paramètre m le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

9. Soient A et B deux matrices carrés $n \times n$ qui commutent entre elles, $i.e$ telles que $AB = BA$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n$ commute avec B.
   (b) Montrer que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}, A^n$ et B^m commutent entre elles.
   (c) Établir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la formule
$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-j} B^j \,, \qquad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \,.$$
2. Donner un exemple de deux matrices A et B pour lesquelles
$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \,.$$
3. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f((x,y,z)) = (2x + 5y - z, 2y + 3z, 2z) \,.$$
   Exprimer sa matrice A dans la base canonique. Calculer toutes les puissances de $B = A - 2I$ et en déduire l'expression de $f^n((x,y,z))$, pour $n \in \mathbb{N}$.

10. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne d'ordre $n > 1$, c'est à dire sa transposée ${}^tV$ est une matrice ligne $(v_1, v_2 \ \ldots, v_n)$, supposée non nulle.

1. Justifier que $M = V.{}^tV$ est une matrice $n \times n$ et que ${}^tV.V$ est une matrice 1×1.
2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de composantes dans $\mathcal{B}$ les v_i, et $f \in L(\mathbb{R}^n)$ de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{v\}$, en déduire que le rang de M est 1. La matrice M est-elle inversible ?
3. Soit I_n la matrice identité d'ordre n. Soit $\rho = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$.
   Montrer que, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\rho\}$, alors $A = aI_n + M$ est inversible. Trouver son inverse sous la forme $bI_n + cM$.
4. En déduire que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible si $a \notin \{1, -2\}$.
   (On pourra considérer la matrice de $u + (a-1)id_E$ dans une base judicieusement choisie).
5. Calculer les itérées A^n de A.

11. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 réelles. On rappelle que sa base canonique est $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, où

$$E_{kl} = (\delta_{ij}(k, l))_{1 \leq i,j \leq 2}$$

et $\delta_{ij}(k, l)$ est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{k,l}(kl) = 1\,, \qquad \delta_{ij}(k, l) = 0 \text{ si } (i, j) \neq (k, l)\,.$$

Soit enfin la donnée d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $f : E \to E$, définie par $f(M) = AM$, est linéaire.
2. Donner sa matrice F dans la base $\mathcal{B}$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit un isomorphisme.

12. *Exercice extrait de l'examen de Juin 1999*
On considère l'application linéaire $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, est $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ($m$ désigne un paramètre réel).

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f_m)$ et $\mathrm{Im}(f_m)$ en fonction du paramètre m. On donnera pour chacun de ces sous-espaces vectoriels une base. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_m) + \mathrm{Im}(f_m)$?
2. Soit $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, et calculer P^{-1}.
3. On prend $m = -1$ et on pose $f = f_{-1}$.
   (a) Soit $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \; ; \; f(v) = v\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F.
   (b) Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PB^nP^{-1}$.
   (c) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 2$ et en déduire A^n.

13. *Exercice extrait de l'examen de Mai 1997*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $b_1 = (1, 1, -2), b_2 = (1, 1, -3),\ b_3 = (0, -1, 2)$.
   Montrer que $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer la matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer de deux manières différentes la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

14. *Exercice extrait de l'examen de Mai 1998* Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 ; f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 ; f(v) = 4v\}$. Montrer que
   (a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
   (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Exprimer la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$.
   (c) Calculer B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Exprimer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$, puis calculer P^{-1}.
   En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = 1, z_0 = -1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = -2x_n, y_{n+1} = 3x_n + y_n + 3z_n \text{ et } z_{n+1} = 3x_n + 3y_n + z_n \,.$$

   Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Liste d'exercices n° 4

Matrices remarquables et déterminants

Matrices remarquables

1. *Matrices nilpotentes.*

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n \geq 1$.
2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $B = I + A$, calculer B^n pour tout $n \geq 1$. (On rappellera la formule du binôme pour les matrices, en précisant dans quels cas elle est applicable).
3. Calculer B^{-1} en utilisant une formule du cours.

2. *Matrices de permutation.*

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient les applications linéaires f et g définies respectivement par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_3$ et $g(e_1) = e_1, g(e_2) = e_3, g(e_3) = e_2$. On note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique.

1. Calculer les matrices $AB, BA, A^2, B^2, A^{-1}, B^{-1}$.
2. Vérifier les résultats obtenus dans la question 1 en écrivant les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ associées aux endomorphismes f et g et en utilisant le cours.

3. *Matrice de projection*

On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'application f définie comme la projection sur le plan $E : x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.

1. Donner une base de E et indiquer sa dimension. Faire de même pour F.
2. Écrire la matrice P de l'endomorphisme f dans la base obtenue. Déterminer le rang de P, ainsi que l'image et le noyau de f.
3. Montrer que $P^2 = P$.

Déterminants

4. Calculer le déterminant des matrices suivantes, et indiquer lesquelles sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 14 & 15 \\ 9 & 12 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 11 & 10 \\ 16 & 13 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

2. Calculer AB et $\det(AB)$. Retrouver une propriété du cours.
3. Calculer la matrice transposée de A et son déterminant. Retrouver une propriété du cours.

6. Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$. Calculer le déterminant de la matrice associée à cette permutation (aucun calcul n'est nécessaire).

7. En utilisant la règle "*On ne change pas le déterminant d'une matrice si on ajoute à une de ses lignes, (resp. de ses colonnes), une combinaison linéaire des autres lignes, (resp. des autres colonnes)*", justifier que les déterminants suivants sont nuls, (sans les développer) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix} \ (\textit{pour } x=-a-b-c).$$

8. Calculer le déterminant des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, et dire celles qui sont libres,

$$\{(1,1,1),(1,0,-1),(0,-1,-1)\}$$
$$\{(3,2,1),(2,-1,1),(1,3,0)\}$$

9. Soient A et B deux matrices réelles de taille $n \times n$, telles que $AB = BA$. Montrer que

$$\det(A^2+B^2) \geq 0 .$$

On pensera aux identités remarquables en utilisant les nombres complexes et aux propriétés du déterminant.

10. *Règle de Sarrus.*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3 quelconque. Donner son déterminant sous forme totalement développée. En déduire une présentation pratique pour le calcul du déterminant des matrices 3×3.

Matrices par blocs

11. Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer les déterminants $\det(M), \det(A), \det(B)$, et vérifier que $\det(M) = \det(A).\det(B)$.

12. Soit A_n la matrice de taille d'ordre n ($n \geq 2$) de coefficients $a_{i,j}$ définis par :

$$\begin{cases} a_{i,i} = 2 & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \\ a_{i,i+1} = 1 & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ a_{i-1,i} = 1 & \text{pour} \quad 2 \leq i \leq n \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note Δ_n son déterminant.

En effectuant un développement par rapport à la première colonne, trouver une relation de récurrence reliant Δ_n à Δ_{n-1} et Δ_{n-2}. En déduire par récurrence que $\Delta_n = n+1$ pour tout $n \geq 2$.

13. *Extrait de l'examen de Juin 1999*

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,-1,0,2), u_2 = (0,1,0,-2), u_3 = (2,-1,0,3), v_1 = (1,-1,1,0), v_2 = (-2,0,a,2)$$

où a est un paramètre réel. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par $U = \text{Vect}\{u_1,u_2,u_3\}$ et $V = \text{Vect}\{v_1,v_2\}$.

1. Calculer la dimension de V. Cette dimension dépend-elle du paramètre a ?
2. (a) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer en fonction des réels x, y, z, t le déterminant des 4 vecteurs u_1, u_2, u_3, u.

   (b) En déduire une relation entre x, y, z et t comme condition nécessaire et suffisante pour que $u = (x, y, z, t)$ appartienne à U.
3. (a) Calculer la dimension et une base de $U \cap V$ (distinguer selon les valeurs de a).

   (b) Calculer la dimension de $U + V$.

Systèmes linéaires

14. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

ait une unique solution pour toutes données α et β.

Calculer l'inverse de M quand il existe.

15. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$$

16. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants, en fonction du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^2z = 1 \end{cases}$$