Liste d'exercices
Espaces vectoriels

A. Exercices fondamentaux

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

1. Montrer que l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Dans chacun des cas suivants dites, en justifiant votre réponse, si F_i est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de E_i, les divers espaces vectoriels E_i étant munis des opérations usuelles.
   Si votre réponse est *non*, précisez cependant s'il y a stabilité pour l'une des deux opérations.

   (a) $E_1 = \mathbb{R}^3$; $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + 3y - 4z = 0\}$.
   (b) $E_2 = \mathbb{R}^3$; $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x + 3y - 4z = 1\}$.
   (c) $E_3 = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $F_3 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ f(3) = 0\}$.
   (d) $E_4 = \mathbb{R}[X]$; $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ d^oP \leq 5\}$.

3. (a) Le vecteur $g = (2, 14, -34, 7)$ appartient-il au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $e_1 = (1, 4, -5, 2)$ et $e_2 = (1, 2, 3, 1)$?
   (b) Déterminer λ et μ de façon que le vecteur $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne au sous-espace engendré par $(1, 2, -5, 3)$ et $(2, -1, 4, 7)$.

4. (a) On donne dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $u_1 = (2, 3, -1)$, $u_2 = (1 - 1, -2)$, $v_1 = (3, 7, 0)$, $v_2 = (5, 0, -7)$. Montrer que les deux sous-espaces engendrés par u_1 et u_2 d'une part et par v_1 et v_2 d'autre part sont identiques.
   (b) Déterminer $F_1 \cap F_2$, où $F_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $F_2 = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $u_1 = (4, 2, -5)$, $u_2 = (-1, 3, 1)$, $v_1 = (3, -4, 2)$ et $v_2 = (5, -2, 2)$.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = y = z\}$ et $E_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Familles libres, liées, génératrices et bases

1. Précisez la dépendance linéaire des familles de vecteurs suivantes en donnant, dans chaque cas, une relation de dépendance s'il en existe une ainsi qu'une sous-famille libre de cardinal maximal.

   (a) Dans $\mathbb{R}^2$, (u, v, w) avec $u = (3, 2)$, $v = (4, -1)$ et $w = (5, -2)$.
   (b) Dans $\mathbb{R}^4$, (u, v, w) avec $u = (2, -1, 5, 7)$, $v = (3, 1, 5, -2)$ et $w = (1, 1, 1, -4)$.
   (c) Dans $\mathbb{R}^4$, (u, v, w, t) avec $u = (2, 0, 4, 2)$, $v = (1, 2, -2, -3)$, $w = (3, 1, 3, 4)$ et $t = (2, 4, 9, 5)$.
   (d) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, (P, Q, R, S) avec $P = 3 + 3X + X^2 + X^3$, $Q = 1 - X - X^2 + X^3$, $R = -1 - X + X^2 + X^3$ et $S = 3 - 3X + X^2 + X^3$.

2. (a) Déterminer si les familles de vecteurs suivantes forment ou non des bases de $\mathbb{R}^3$:
   $F_1 = ((1, 1, 1), (1, 2, 3))$
   $F_2 = ((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1))$

   (b) Même question dans $\mathbb{R}^4$:
   $F_1 = ((1, 2, 1, 2), (-2, -3, 0, -5), (4, 9, 6, 7), (1, -1, -5, 5))$

(c) Même question dans $\mathbb{R}_4[X]$:
$F_1 = (1+X, 1+X^2, 1+X^3, 1+X^4)$

3. Dans cet exercice il s'agit, pour chacun des cas ci-dessous, de prouver que B est une base de l'espace vectoriel E, puis de calculer les coordonnées du vecteur u dans la base B.

   (a) $E = \mathbb{R}^3$; $B = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$; $u = (a,b,c)$.

   (b) $E = \mathbb{C}^3$; $B = ((1,-1,i),(-1,i,1),(i,1,-1))$; $u = (1+i, 1-i, i)$.

   (c) $E = \mathbb{R}_3[X]$; $B = (1+X+X^2+X^3, X+X^2+X^3, X^2+X^3, X^3)$; $u = a+bX+cX^2+dX^3$.

Espaces vectoriels de dimension finie

1. (a) Soient E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par :
$(2,2,1,0)$, $(1,4,2,-1)$, $(2,1,-1,0)$, $(2,-5,4,2)$ et par :
$(2,1,4,5)$, $(1,2,3,4)$.
Déterminer les dimensions de E, F, $E+F$, $E \cap F$ en donnant une base de chacun d'eux.

   (b) Même question avec : $(1,2,0,1)$, $(2,1,3,1)$, $(1,-4,6,-1)$ et :
$(1,2,1,0)$, $(-1,1,1,1)$, $(2,-1,0,1)$, $(2,2,2,2)$.

2. Soient P et Q les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$
$Q = \mathrm{Vect}(v_1 = (2,-1,0), v_2 = (-2,2,-1), v_3 = (4,-1,-1))$.

   (a) Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces P et Q.

   (b) Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que v appartienne à Q.

   (c) Déterminer une base puis la dimension de $P \cap Q$ puis de $P+Q$.

B. Exercices complémentaires

1. Dans chacun des cas suivants dites, en justifiant votre réponse, si F_i est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de E_i, les divers espaces vectoriels E_i étant munis des opérations usuelles.
Si votre réponse est *non*, précisez cependant s'il y a stabilité pour l'une des deux opérations.

   (a) $E_1 = \mathbb{R}^3$; $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

   (b) $E_2 = \mathbb{R}[X]$; $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ d^oP = 5\}$.

   (c) $E_3 = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $F_3 = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f + f' = 0\}$.

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   (a) Prouver que $E \setminus F$ n'est jamais un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Donner un exemple prouvant que $F \cup G$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E.

   (c) Montrer : ($F \cup G$ sous-espace vectoriel de E) $\iff$ ($F \subset G$ ou $G \subset F$).

   (d) Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel, au sens de l'inclusion, qui contient $F \cup G$.

3. Avec le moins de calculs possible, précisez si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées. Si la famille est liée, donner une relation de liaison.

   (a) Dans $\mathbb{R}^3$, (u,v,w) avec $u = (1,7,2)$, $v = (2,-14,-4)$ et $w = (7,5,-3)$.

   (b) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, (u,v,w,t) avec $u = 1$, $v = X$, $w = X^2$ et $t = a+bX+cX^2$.

   (c) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, (u,v,w,t) avec $u = 1$, $v = 1+X$, $w = 1+X+X^2$ et $t = 1+X+X^2+X^3$.

(d) Dans $\mathbb{C}^3$, (u,v,w) avec $u=(1,0,1)$, $v=(1,j,j^2)$ et $w=(j,j^2,1)$.

(e) Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, (u,v,w) avec $u=\sin(x)$, $v=\cos(x)$, $w=\cos(x+\frac{\pi}{3})$.

4. Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, étudiez la liberté des familles suivantes :

   (a) (f,g,h) avec $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(x)$, $g(x)=\sin(x)$ et $h(x)=\cos(2x)$.

   (b) (f,g,h) avec $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $g(x)=\exp(x)$ et $h(x)=\exp(2x)$.

   (c) (f,g,h,k) avec $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $g(x)=\ln(1+x^2)$, $h(x)=x^3$ et $k(x)=\exp(x)$.

5. (a) Déterminer si les familles de vecteurs suivantes forment ou non des bases de $\mathbb{R}^3$:
   $F_1=((1,1,1),(1,2,3),(1,1,a))$ où a est un paramètre réel.
   $F_2=((1,1,1),(1,a,a^2),(1,b,b^2))$ où a et b sont deux paramètres réels.

   (b) Même question dans $\mathbb{R}^4$:
   $F_2=((1,1,3,4),(-2,0,0,0),(2,4,1,1),(3,5,7,2))$
   $F_3=((1,a,1,b),(a,1,b,1),(1,c,1,d),(c,1,d,1))$ où a, b, c et d sont des paramètres réels.

   (c) Même question dans $\mathbb{R}_4[X]$:
   $F_2=(1+X,1+2X+X^2+2X^3+X^4,X^2+X^3+X^4,X^2+X^3+2X^4,1+2X+2X^2+X^3+X^4)$

6. Soient U, V, W les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$U=\{(x,y,z)/2x+y+4z=0\}\ ;\ V=\{(x,y,z)/3x=5z\}\ ;W=\{(x,y,z)/x=y=0\}.$$

   Déterminer une base de chacun de ces trois sous-espaces.
   Déterminer les trois sommes $U+V$, $U+W$, $V+W$, en précisant à chaque fois si la somme est directe.

7. Soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé par les vecteurs (a,b,c,d) qui vérifient : $b-2c+d=0$, et soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ formé par ceux qui vérifient $a=d$ et $b=2c$.
   Trouver une base et la dimension de U, puis compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
   Même question pour V, puis pour $U\cap V$.

8. Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle de la forme $x'+a(t)x=0$ où a est une fonction continue est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.
   Même question avec $x''(t)+a.x'(t)+b.x(t)=0$ où a et b sont des réels.

9. (a) Montrer que $F=\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$ dont on donnera la dimension ainsi qu'une base.

   (b) Montrer que l'ensemble G des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par $X(X-1)^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$.
   Donner la dimension et une base de G.

   (c) Montrer que : $\mathbb{R}_5[X]=F\oplus G$.

   (d) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_5[X]$.
   Utiliser la division euclidienne pour reprouver directement qu'il existe un unique couple $(P_1,P_2)\in F\times G$ tel que $P=P_1+P_2$.

   (e) Application numérique : $P(X)=1+X+X^2+X^3+X^4+X^5$.

C. Exercices d'entraînement

1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, quels sont les sous-espaces vectoriels ?

   (a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+y=0\}$.

   (b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+y=1\}$.

   (c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+y\geq 0\}$.

2. Soient $u=(1,1,1), v=(0,-1,2), w=(1,-2,3)$ trois éléments du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que la famille (u,v,w) est liée.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u,v,w). Donner une base de F.
   (c) Soit $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ; \ x+2y+z=0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G.
   Montrer que $F=G$.
   (Montrer correctement que $F\subset G$ et $G\subset F$)

3. Soient $u=(1,2,3)$ et $v=(6,7,8)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $E=\mathrm{Vect}(u,v)$. Montrer que $B=(u,v)$ est une base de E.
   Exprimer les coordonnées du vecteur $w=(4,5,6)$ de E dans la base B.
   (Réponse : $w=(2/5)u+(3/5)v$)

4. (a) a_1, a_2, a_3 étant trois nombres réels deux à deux distincts, montrer que les polynômes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$:
   $$\phi_1(X)=\frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)},\ \phi_2(X)=\frac{(X-a_3)(X-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)},\ \phi_3(X)=\frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$
   Décomposer tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ dans cette base, puis les polynômes 1, X et X^2.
   (b) Étant donnés n nombres réels deux à deux distincts a_1, a_2,...,a_n, on note : $\pi_k(x)=\Pi_{p\neq k}(x-a_p)$ et
   $$\phi_k(x)=\frac{\pi_k(x)}{\pi_k(a_k)}=\frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})...(x-a_n)}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)...(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})...(a_k-a_n)}.$$
   Vérifier que, k étant fixé, ϕ_k est un polynôme de degré $n-1$, et que $\phi_k(a_p)$ vaut 1 si $k=p$ et 0 sinon.
      i. Montrer que la famille $(\phi_1,\phi_2,...,\phi_n)$ est libre dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
      ii. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a la relation : $P=\sum_{k=1}^n P(a_k)\phi_k$.
      iii. Étant donnés n nombres b_1, b_2,...,b_n, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (appelé polynôme d'interpolation de Lagrange) tel que pour tout k compris entre 1 et n, on ait : $P(a_k)=b_k$.

5. Soient a et b deux réels ($b\neq 0$), et E l'ensemble des suites réelles (u_n) qui vérifient la relation de récurrence :
   $$\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n.$$
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.
   (b) Montrer que, si $v=(v_n)$ et $w=(w_n)$ sont deux suites de E telles que $v_0=w_0$ et $v_1=w_1$, alors $v=w$.
   (c) On pose :
   $s=(s_n)=$ unique suite de E telle que $s_0=0$ et $s_1=1$ et
   $t=(t_n)=$ unique suite de E telle que $t_0=1$ et $t_1=0$.
   Montrer que (s,t) est une base de E.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a^2+4b\geq 0$ et que r est une racine du polynôme X^2-aX-b.

   (d) On suppose que $a^2+4b>0$. Montrer que la suite (r^n) appartient à E.
   Déterminer une nouvelle base de E, puis la forme générale des éléments de E.
   (e) On suppose que $a^2+4b=0$. Montrer que les deux suites (r^n) et (nr^n) appartiennent à E. Déterminer alors la forme générale des éléments de E.
   (f) Application : déterminer le terme général de la suite (F_n), dite de Fibonacci, définie par :
   $$F_0=F_1=1,\ \text{et},\ \forall n\in\mathbf{N},\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n.$$