Liste d'exercices n° 2

Application linéaire. Noyau et image

Exercice 1 Dans cet exercice, il s'agit de préciser, avec preuve à l'appui dans chaque cas, si l'application f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est linéaire ou non.
a). $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$
b). $E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$
c). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}$; $f(x, y) = ax + by + c$; a, b et c réels.

Exercice 2 Dans cet exercice, il s'agit de déterminer à chaque fois, le noyau et l'image de l'application linéaire f de E dans F, en donnant une base de chacun de ces sous-espaces.
Dans chaque cas, précisez si f est injective, surjective, bijective.
Quand f est bijective, donner sa bijection linéaire réciproque.
a). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x, y)) = (x - y, x, x + y)$
b). $E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathbb{R}^3$; $f((x, y, z)) = (y + z, z + x, x + y)$
c). $E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x, y)) = (2x + 3y, 3x + 10y)$
d). $E = \mathbb{R}^4$; $F = \mathbb{R}^2$; $f((x, y, z, t)) = (3x - 4y + 2z - 5t, 3x - z + 2t)$

Exercice 3
a). Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,((1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1))$
b). Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

Exercice 4
On rappelle que $R_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
a). Soit f l'application de $R_3[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall P \in R_3[X]$, $f(P) = P(2)$. Montrer que f est linéaire; déterminer son image et son noyau.
b). Soit a et b deux réels distincts et f l'application de $R_4[X]$ dans $R_4[X]$ définie par $\forall P \in R_4[X]$, $f(P) = XP(a) + P(b)$.
Montrer que f est un endomorphisme de $R_4[X]$; déterminer son noyau et en donner une base; déterminer son image et en donner une base.

Exercice 5
a). Montrer que si f est une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, son noyau est de dimension 3.
b). Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (0, -1, 1, 1)$, $u_2 = (0, -3, -1, 5)$ et $u_3 = (4, -1, -3, 3)$.
α). Vérifier que H est de dimension 3.
β). Montrer qu'une application linéaire non nulle f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admet H pour noyau si et seulement si elle vérifie $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$ et $f(u_3) = 0$.
γ). Déterminer toutes les applications linéaires f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ admettant H pour noyau.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que la famille $(f(u), f^2(u), f^3(u), \ldots, f^n(u))$

soit une base de E.
a). Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est aussi une base de E.
b). Montrer que f est bijectif.
c). Montrer qu'il existe n scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :
$f^n(u) = a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(u)$.
d). En déduire que : $f^n = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Exercice 7
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est à dire tels que $F_1 \oplus F_2 = E$.
On rappelle que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
• $F_1 \oplus F_2 = E$
• $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$
• Pour tout vecteur u de E, il existe un unique couple (u_1, u_2) de vecteurs vérifiant :
$u_1 \in F_1$, $u_2 \in F_2$, $u_1 + u_2 = u$
On notera :
$u_1 = p_1(u) =$ "Projection de u sur F_1 parallèlement à F_2"
$u_2 = p_2(u) =$ "Projection de u sur F_2 parallèlement à F_1"
a). Montrer que p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E .
b). Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1) = F_2$ et $\mathrm{Im}(p_1) = F_1$
(par raison de symétrie, on a bien sûr aussi $\mathrm{Ker}(p_2) = F_1$ et $\mathrm{Im}(p_2) = F_2$).
c). Montrer que : $v \in F_1 \Longleftrightarrow p_1(v) = v$
d). Montrer que : $p_1 \circ p_2 = p_1$

Exercice 8
Plus généralement, un endomorphisme p de E est appelé **projecteur** si et seulement si $p \circ p = p$.
a). Montrer que : p projecteur de $E \Longleftrightarrow (Id_E - p)$ projecteur de E .
b). Si p est un projecteur, montrer que :
• $\mathrm{Im}(Id_E - p) = \mathrm{Ker}(p)$
• $\mathrm{Ker}(Id_E - p) = \mathrm{Im}(p)$
• $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
• p est la projection vectorielle de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
c). Soit p un projecteur et u un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
• $p \circ u = u \circ p$
• $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u
d). Soit p et q deux projecteurs de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(p + q)$ soit aussi un projecteur.

Exercice 9 (Lemme de **Schur**)
Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ soit liée.
Montrer que f est une homothétie vectorielle (*i.e.* $\exists \lambda \in K$, $f = \lambda Id_E$).

Exercice 10
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
a). Soit E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E (*i.e.* $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$). Prouvez que : $f \circ p = p \circ f \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f .
b). On appelle centre de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, o)$ l'ensemble des $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que :
$\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $foh = hof$. Montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est réduit aux homothéties (*i.e.* λId_E, $\lambda \in K$).

Exercice 11

Soit E un K-espace vectoriel. On se pose la question de savoir si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

a). Montrez que si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire H stable par f (*i.e.* $f(H) \subset H$) alors $H = \mathrm{Im}(f)$.

b). Prouvez un résultat analogue pour $\mathrm{Im}(f)$.

c). Prouvez que : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$

d). Prouvez que : $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

e). Si f est un endomorphisme de E, a-t-on E = Ker(f) + Im(f) ?