Faculté des Sciences et des Techniques **Année 2001/2002**
Département de Mathématiques **DEUG A, M2, Algèbre linéaire**

Liste d'exercices 3

Exercice 1 Déterminer tous les produits possibles de deux matrices (y compris les carrés) parmi les matrices suivantes puis les inverses de ces matrices lorsqu'elles sont inversibles (on pourra utiliser les calculs effectués) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Même question avec les matrices transposées ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tC$, ${}^tD$, ${}^tE$.

Exercice 2 Soit les applications linéaires $f \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ et $g \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$ définies par:
$f((x,y,z)) = (x+2y+3z, y+2z)$ et $g((x,y)) = (x-y, x-2y, x-3y)$.

1. Donner, dans les bases canoniques $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice M de f et celle N de g.
2. (a) Calculer la matrice A de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{C}$ et celle D de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire l'expression de $(g \circ f)((x,y,z))$ et de $(f \circ g)((x,y))$ à l'aide de A et D. Faire la vérification.
3. Justifier que le rang de f et celui de g ne peuvent pas dépasser 2 avant de calculer ces rangs explicitement. Mêmes questions avec le rang de $f \circ g$ et celui de $g \circ f$.
4. (a) Parmi les applications linéaires f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$, préciser, en justifiant, celles qui sont susceptibles d'être injectives, surjectives, puis bijectives.
   (b) Pour chacune de ces applications, déterminer son noyau et son image.
   (c) $g \circ f$ est-elle bijective? Si oui, déterminer la matrice de son inverse dans la base canonique.

Exercice 3 Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$, $f((x,y,z)) = (y-z, z-x, x-y)$.

1. Trouver sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
2. Soit la nouvelle base $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$, $c_1 = e_1$, $c_2 = e_1 + e_2$, $c_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
   Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. En déduire à l'aide de P et A, la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$. Faire la vérification.

Exercice 4 Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$, $c_1 = e_2 + e_3$, $c_2 = e_1 + e_3$, $c_3 = e_1 + e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice B de f dans cette base.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer B^n et en déduire A^n.
3. On considère trois suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 2x_n$, $y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n$ et $z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$.
   Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 3.
On définit l'application $f : E \to E$ par $f(p) = (x^2-1)p'' + 2xp'$.

1. Vérifier que f est linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$.
2. Calculer le rang de f et trouver une base de $Ker(f)$ et une de $Im(f)$.
3. (a) Vérifier que, pour tout $j = 0, \ldots, 3$ il existe un unique polynôme unitaire p_j de degré j et un unique réel λ_j tel que $f(p_j) = \lambda_j p_j$.
   (b) Justifier que $\mathcal{C} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est une base de E et donner la matrice D de f dans cette base.
   Calculer D^n et en déduire A^n, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

1. Calculer le rang de $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les itérés de N, N^n.
3. Si $u \in L(\mathbb{R}^3)$ est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique N, prouver E est somme directe de son noyau et de son image.

Exercice 7 Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $u \in L(\mathbb{R}^3)$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

1. (a) Déterminer $Ker(u)$ et $Im(u)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(u) \oplus Im(u)$. En déduire que la restriction v de u à son image , $v = u_{|Im(u)} : Im(u) \to Im(u)$, est une application linéaire bijective.
2. Soit p la projection linéaire sur $Im(u)$ parallèment à $Ker(u)$. Trouver sa matrice Q dans la base canonique. En déduire que $u = \alpha p$, où α est un réel que l'on déterminera.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer u^n à l'aide de la question 2.
   Faire la vérification en calculant par récurrence A^n.
4. Soit $\mathcal{C}_0$ une base de $Ker(u)$ et $\mathcal{C}_1$ une base de $Im(u)$. Justifier que $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice M de u dans cette base.

Exercice 8 Calculer en fonction du paramètre m le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

Exercice 1' Soient A et B deux matrices carrés $n \times n$ qui commutent entre elles, *i.e* telles que $AB = BA$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n commute avec B.
   (b) Montrer que, pour tout $n,\ m \in \mathbb{N}$, A^n et B^m commutent entre elles.
   (c) Etablir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la formule

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-j} B^j, \quad \left(\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \right).$$

2. Donner un exemple de deux matrices A et B pour lesquelles
$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \quad .$$

3. Soit l'application linéaire $f : \ \mathbb{R}^3 \ \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f((x,y,z)) = (2x+5y-z, 2y+3z, 2z) \quad .$$
Exprimer sa matrice A dans la base canonique. Calculer toutes les puissances de $B = A - 2I$ et en déduire l'expression de $f^n((x,y,z))$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2' Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne d'ordre $n > 1$, c'est à dire sa transposée ${}^tV$ est une matrice ligne $(v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_n)$, supposée non nulle.

1. Justifier que $M = V.{}^tV$ est une matrice $n \times n$ et que ${}^tV.V$ est une matrice 1×1 .

2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de composantes dans $\mathcal{B}$ les v_i, et $f \in L(\mathbb{R}^n)$ de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

   Prouver que $Im(f) = Vect\{v\}$, en déduire que le rang de M est 1. La matrice M est-elle inversible ?

3. Soit I_n la matrice identité d'ordre n. Soit $\rho = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$.

   Montrer que, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\rho\}$, alors $A = aI_n + M$ est inversible.

   Trouver son inverse sous la forme $bI_n + cM$.

4. En déduire que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible si $a \notin \{1, -2\}$.
   (On pourra considérer la matrice de $u + (a-1)id_E$ dans une base judicieusement choisie).

5. Calculer les itérées A^n de A.

Exercice 3' Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 réelles. On rappelle que sa base canonique est $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, où $E_{kl} = (\delta_{ij}(k,l))_{1 \leq i,j \leq 2}$,
($\delta_{ij}(k,l)$ est le symbole de Kronecker: $\delta_{k,l}(kl) = 1$ et $\delta_{ij}(k,l) = 0$ si $(i,j) \neq (k,l)$.

Soit enfin la donnée d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $f : \ E \ \to \ E$, définie par $f(M) = AM$, est linéaire.

2. Donner sa matrice F dans la base $\mathcal{B}$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit un isomorphisme.

Exercice extrait de l'examen de Juin 1999

On considère l'application linéaire $f_m : \ \mathbb{R}^3 \ \to \ \mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, est $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ($m$ désigne un paramètre réel).

1. Déterminer $Ker(f_m)$ et $Im(f_m)$ en fonction du paramètre m. On donnera pour chacun de ces sous-espaces vectoriels une base. A-t-on $\mathbb{R}^3 = Ker(f_m) + Im(f_m)$?

2. Soit $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,0)$. Montrer que $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, et calculer P^{-1}.

3. On prend $m = -1$ et on pose $f = f_{-1}$.

   (a) Soit $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \; ; \; f(v) = v\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F.

   (b) Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PB^nP^{-1}$.

   (c) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 2$ et en déduire A^n.

Exercice extrait de l'examen de Mai 1997

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f((x,y,z))$ en fonction de x, y et z.

2. On pose $b_1 = (1,1,-2)$, $b_2 = (1,1,-3)$, $b_3 = (0,-1,2)$.
   Montrer que $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer la matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$.

4. Calculer de deux manières différentes la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice extrait de l'examen de Mai 1998

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $f((x,y,z))$ en fonction de x, y et z.

2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \; ; \; f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \; ; \; f(v) = 4v\}$. Montrer que

   (a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.

   (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

3. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1,0,-1)$, $e_2 = (0,1,-1)$ et $e_3 = (0,1,1)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Exprimer la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$.

   (c) Calculer B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Exprimer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$, puis calculer P^{-1}.
   En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4. Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = 1$, $z_0 = -1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = -2x_n, \; y_{n+1} = 3x_n + y_n + 3z_n \text{ et } z_{n+1} = 3x_n + 3y_n + z_n \; .$$

   Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.