Université de Nantes **Département de Mathématiques**
DEUG MIAS - Module M2 Algèbre **Année 2001/2002**

Liste d'exercices
Matrices remarquables et déterminants

1 Matrices remarquables

Exercice 1. Matrices nilpotentes.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n \geq 1$.

2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $B = I + A$, calculer B^n pour tout $n \geq 1$. (On rappellera la formule du binôme pour les matrices, en précisant dans quels cas elle est applicable).

3. Calculer B^{-1} en utilisant une formule du cours.

Exercice 2. Matrices de permutation.
Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient les applications linéaires f et g définies respectivement par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_3$ et $g(e_1) = e_1, g(e_2) = e_3, g(e_3) = e_2$. On note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique.

1. Calculer les matrices AB, BA, A^2, B^2, A^{-1}, B^{-1}.

2. Vérifier les résultats obtenus dans la question 1 en écrivant les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ associées aux endomorphismes f et g et en utilisant le cours.

Exercice 3. Matrice de projection.
On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'application f définie comme la projection sur le plan $E : x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $F = Vect\{(1, 1, 1)\}$.

1. Donner une base de E et indiquer sa dimension. Faire de même pour F.

2. Écrire la matrice P de l'endomorphisme f dans la base obtenue. Déterminer le rang de P, ainsi que l'image et le noyau de f.

3. Montrer que $P^2 = P$.

2 Déterminants

Exercice 4.
Calculer le déterminant des matrices suivantes, et indiquer lesquelles sont inversibles.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 14 & 15 \\ 9 & 12 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 11 & 10 \\ 16 & 13 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer det(A) et det(B).
2. Calculer AB et det(AB). Retrouver une propriété du cours.
3. Calculer la matrice transposée de A et son déterminant. Retrouver une propriété du cours.

Exercice 6.

Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$. Calculer le déterminant de la matrice associée à cette permutation (aucun calcul n'est nécessaire).

Exercice 7.

En utilisant la règle "*On ne change pas le déterminant d'une matrice si on ajoute à une de ses lignes, (resp. de ses colonnes), une combinaison linéaire des autres lignes, (resp. des autres colonnes)*", justifier que les déterminants suivants sont nuls, (sans les développer):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix} \textit{(pour } x = -a-b-c\textit{)}.$$

Exercice 8.

Calculer le déterminant des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, et dire celles qui sont libres,

$$\{(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (0,-1,-1)\}$$
$$\{(3,2,1),\ (2,-1,1),\ (1,3,0)\}$$

Exercice 9.

Soient A et B deux matrices réelles de taille $n \times n$, telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2) \geq 0$ (on pensera aux identités remarquables en utilisant les nombres complexes et aux propriétés du déterminant).

Exercice 10. Règle de Sarrus.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice 3×3 quelconque. Donner son déterminant sous forme totalement développée. En déduire une présentation pratique pour le calcul du déterminant des matrices 3×3.

Exercice 11. Matrices par blocs.

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer det(M), det(A), det(B), et vérifier que det(M) = det(A).det(B).

Exercice 12.

Soit A_n la matrice de taille $n \times n$ ($n \geq 2$) de coefficients $a_{i,j}$ définis par :

$$\begin{cases} a_{i,i} = 2 & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \\ a_{i,i+1} = 1 & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ a_{i-1,i} = 1 & \text{pour} \quad 2 \leq i \leq n \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note Δ_n son déterminant.

En effectuant un développement par rapport à la première colonne, trouver une relation de récurrence reliant Δ_n à Δ_{n-1} et Δ_{n-2}. En déduire par récurrence que $\Delta_n = n+1$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 13. Extrait de l'examen de Juin 1999

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,-1,0,2), u_2 = (0,1,0,-2), u_3 = (2,-1,0,3), v_1 = (1,-1,1,0), v_2 = (-2,0,a,2)$$

où a est un paramètre réel.

Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par $U = Vect\{u_1, u_2, u_3\}$ et $V = Vect\{v_1, v_2\}$.

1. Calculer la dimension de V. Cette dimension dépend-elle du paramètre a ?
2. (a) Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer en fonction des réels x,y,z,t le déterminant des 4 vecteurs u_1, u_2, u_3, u.

   (b) En déduire une relation entre x,y,z et t comme condition nécessaire et suffisante pour que $u = (x,y,z,t)$ appartienne à U.
3. (a) Calculer la dimension et une base de $U \cap V$ (distinguer selon les valeurs de a).

   (b) Calculer la dimension de $U + V$.

3 Systèmes linéaires

Exercice 14.

Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

ait une unique solution pour toutes données α et β.

Calculer l'inverse de M quand il existe.

Exercice 15.

Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$$

Exercice 16.

Résoudre le système linéaire suivant en utilisant les déterminants, en fonction du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^2z = 1 \end{cases}$$