Université de Nantes | **Département de Mathématiques**
DEUG MIAS - Module M2 Analyse | **Année 2001/2002**

Liste d'exercices n° 1

1. Exercices fondamentaux

1. Compléter le tableau suivant :

Avec la valeur absolue	Sur la droite des réels	Inégalités	Intervalle
$\lvert x\rvert < 2$			
$\lvert x-4\rvert \leq 5$			
			[-5,3]
		$-3 < x < 4$	
$\lvert x+6\rvert \geq 2$			
			$]-1,6[$

2. Montrer que pour x et y des nombres réels, on a $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

3. On définit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des $x+iy$ avec x et $y \in \mathbb{R}$, muni des opérations habituelles, et on admet que c'est un corps. Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, on note $|z|^2 = x^2+y^2$.

1. Montrer que si $w = u+iv$ est un autre nombre complexe, alors :
$$\left(|z+w|^2 - |z^2| - |w|^2\right)^2 \leq \ (xu+yv)^2 + 4\,(xv-yu)^2 = 4|z|^2|w|^2.$$
2. En admettant que tout nombre réel positif possède une racine carrée positive, montrer que $0 \leq a \leq b$ entraîne que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, et en déduire que les modules $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ de nombres complexes vérifient l'*inégalité de convexité* ou *inégalité triangulaire* : $|z+w| \leq |z|+|w|$.

4. À partir de l'axiome des segments emboîtés, démontrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que $\mathbb{R}$ possède la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+$, si $x > 1$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n > y$.

5. Déterminer (s'ils existent) les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands ou plus petits éléments des ensembles, fonction ou familles ci-dessous :

1. Les ensembles $A =]-1,2], B =]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]3,4[\cup\{7\}$ et $C = \mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ sur l'intervalle $]0, \frac{2}{\pi}]$.
3. Les familles $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(2^{(-1)^n n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\forall a \in A, a \leq M$,
- $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$, avec $M - \epsilon < a$.

Si on suppose que A est minorée, donner une caractérisation analogue de inf A.

7. Soient A et B deux ensembles de nombres réels, et c un nombre réel. Comparer les bornes des ensembles $A+B = \{\, a+b \in \mathbb{R}\,;\, a \in A$ et $b \in B\,\}$ et $c\,A = \{\, c\,a \in \mathbb{R}\,;\, a \in A\,\}$ avec les bornes de A et de B.

8. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et J un ensemble d'indices.

1. Montrer qu'une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée, et qu'une famille $(x_j)_{j\in J}$ de nombres réels est bornée si et seulement si la famille $(|x_j|)_{j\in J}$ est majorée.
2. Soient maintenant $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes et $(z_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes. On dit par définition que la fonction f est *bornée* si la fonction réelle $|f|$ est majorée, et que la famille $(z_j)_{j\in J}$ est *bornée* si la famille réelle $(|z_j|)_{j\in J}$ est majorée. Montrer que les fonctions complexes bornées forment un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et que les familles complexes bornées forment un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

3. Montrer de plus que la fonction complexe f est bornée si et seulement si les deux fonctions réelles $\Re f$ et $\Im f$ sont bornées, et que la famille complexe $(z_j)_{j\in J}$ est bornée si et seulement si les deux familles réelles $(\Re z_j)_{j\in J}$ et $(\Im z_j)_{j\in J}$ sont bornées.

9. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{m,n} = 1/m + 1/n$, et on note $U = \{u_{m,n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup U$ et $\inf U$.

10. Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application. On dit que

- f est surjective si tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans X,
- f est injective si tout élément de Y est l'image d'au plus un élément de X, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution dans X,
- f est bijective si tout élément de Y est l'image d'exactement un élément de X, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a exactement une solution dans X ; autrement dit, f est à la fois surjective et injective.

Si Z est un troisième ensemble et $g : Y \to Z$ est une application, montrer que

1. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
2. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective
3. si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
4. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
5. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

11. Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application.

1. Si A et B sont des parties de X, montrer que
   (a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
2. Si A' et B' sont des parties de Y, montrer que
   (a) $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
   (b) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   (c) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

2. Exercices complémentaires

12. Soit $K = \{p + q\sqrt{2} \in \mathbb{R};\ p \in \mathbb{Q} \text{ et } q \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que si x et $y \in K$, alors $x + y$ et $x\,y \in K$. Montrer ensuite que K muni de ces deux opérations est un corps.

13. Le but de l'exercice est de montrer que l'on ne peut pas munir $\mathbb{C}$ d'une relation d'ordre total compatible avec les deux opérations usuelles (addition et multiplication). En supposant qu'il existe sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre total compatible avec ces deux opérations, démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z \geq 0$ ou $z \leq 0$, puis en déduire que $z^2 \geq 0$ dans les deux cas. Montrer ensuite que $1 \geq 0$ et $-1 \geq 0$, et en déduire une contradiction. Conclure.

14. Le but de cet exercice est de montrer que tout intervalle $]a,b[$ non vide contient au moins un rationnel et au moins un irrationnel (on dit alors que les rationnels et les irrationnels sont *denses* dans $\mathbb{R}$). On admettra qu'il existe au moins un irrationnel que l'on notera x_0 (un tel irrationnel est implicitement fourni par exemple par l'exercice ci-dessous).

1. Premier cas : $a < 0 < b$. Montrer à l'aide de l'axiome des segments emboîtés que $]a,b[$ contient au moins un irrationnel de la forme $x = 2^{-n}x_0$ pour n assez grand.
2. Deuxième cas : $0 \leq a < b$. Montrer, toujours à l'aide des segments emboîtés, que $2^{-n} < b - a$ pour n assez grand, et que $2^{-p} < (1/b)$ pour p assez grand. En déduire que l'intervalle $]a,b[$ contient un rationnel $q = k2^{-n}$ pour un entier $k \leq 2^{n+p}$, puis qu'il contient aussi un irrationnel (considérer l'intervalle $]a-q, b-q[$).
3. Troisième cas : $a < b \leq 0$. Montrer comme dans le cas précédent que cet intervalle contient au moins un nombre rationnel et au moins un nombre irrationnel.

15. Le but de cet exercice est de montrer que les rationnels ne possèdent pas la propriété d'existence de l'axiome des segments emboîtés.

1. Montrer que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle (par des arguments arithmétiques, en cherchant la solution sous la forme $x = (p/q)$ et en discutant la parité de p et de q).
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[1,2] \cap \mathbb{Q}$. On pose $a_1 = 1, b_1 = 2, m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, puis : $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$ si $m_n^2 < 2$; $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$ si $m_n^2 > 2$.
3. Montrer que a_n et b_n sont rationnels pour tout n, que le cas $m_n^2 = 2$ ne se produit pas, et que si x appartient à tous les segments $[a_n, b_n] \cap \mathbb{Q}$, alors $x^2 = 2$.

   Conclure (on pourra aussi en déduire qu'il existe un nombre réel $x \in [1,2]$ vérifiant $x^2 = 2$, et que ce nombre est irrationnel).

16. On rappelle qu'il n'existe pas de nombre rationnel x vérifiant $x^2 = 2$ (voir exercice ci-dessus). Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ vérifie $x^2 < 2$, alors il existe un nombre *rationnel* $\varepsilon > 0$ tel que $(x+\varepsilon)^2 < 2$. En déduire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \,;\, x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

17. Pour $f(x) = 3x$ et $g(x) = 1 - 2x$, déterminer sur $I = [0,1]$ les bornes supérieures et inférieures des fonctions f, g et $f+g$. Qu'observe-t-on ?

18. Montrer que pour tous réels a et $b, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et étudier le cas d'égalité. Déterminer (s'ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de l'ensemble $E = \{ab \in \mathbb{R} \,;\, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+ \text{ et} a^2 + b^2 = 6\}$.

19. Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si V contient un voisinage de x, alors V lui-même est un voisinage de x. Montrer que l'intersection de deux voisinages de x est encore un voisinage de x, et que c'est aussi vrai pour l'intersection d'un nombre fini de voisinages de x. Ce résultat est-il toujours vrai pour une famille infinie de voisinages de x ?

20. Soient A et B deux ensembles de nombres réels, et c un nombre réel. Comparer les bornes des ensembles $A + B = \{a + b \in \mathbb{R} \,;\, a \in A \text{ et } b \in B\}$ et $cA = \{ca \in \mathbb{R} \,;\, a \in A\}$ avec les bornes de A et de B.

21. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des nombres réels. Déterminer la borne inférieure de la fonction $f(x) = \sum_{j=1}^{n} |x - a_j|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ (on pourra étudier cette fonction sur les intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, puis distinguer le cas où n est pair du cas où n est impair).

3. Exercices d'entraînement

22. Montrer que les rationnels possèdent la propriété d'unicité de l'axiome des segments emboîtés, c'est-à-dire montrer que si $([a_n, b_n] \cap \mathbb{Q})$ est une suite de segments emboîtés *de nombres rationnels* telle que chaque segment soit de longueur moitié de celle du précédent, alors il existe au plus un rationnel appartenant à tous ces segments (utiliser l'axiome des segments emboîtés dans $\mathbb{R}$).

23. Soit A un ensemble de nombres réels. Montrer que si A possède un plus grand élément, alors c'est sa borne supérieure. Réciproquement, montrer que si $\sup(A)$ appartient à A, alors c'est le plus grand élément de A.

24. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

- Donner sans calcul un majorant et un minorant évidents de f.
- En mettant $f(x)$ sous la forme $A\cos(x + \varphi)$, déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f.

25. Montrer que le théorème de la borne supérieure permet de faire la liste des intervalles donnée dans le préambule du cours. Plus précisément :

1. Si l'intervalle I est borné, notons $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Montrer que pour tout x vérifiant $a < x < b, I$ contient au moins un élément $> x$ et au moins un élément $< x$, et en déduire que $x \in I$.

   En discutant l'appartenance de a et de b à I, en déduire que I est l'un des intervalles $]a,b[,]a,b], [a,b[$ ou $[a,b]$.
2. Si l'intervalle I est majoré mais pas minoré, notons $b = \sup(I)$. Montrer que pour tout $x < b, x \in I$, et en déduire que $I =]-\infty, b[$ ou $I =]-\infty, b]$. Raisonner de même si I est minoré non majoré, et encore de même si I n'est ni majoré ni minoré.

26. Soient X, Y, Z trois ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que

1. Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective
2. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective
3. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective

27. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Établir que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) Pour toutes les parties A et B de $X, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. Montrer que pour toute partie A de $X, A \subset f^{-1}(f(A))$, puis établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) Pour toute partie A de $X, A = f^{-1}(f(A))$

28. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que si une fonction $f : I \to J$ est strictement croissante et bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi strictement croissante. Montrer que $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et en admettant qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, en déduire que sa réciproque, la fonction *racine carrée*, est strictement croissante.

29. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$u_{m,n} = \frac{m + 2n + 3}{m + n + 1},$$

et on appelle A l'ensemble $\{u_{m,n},\ (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$.

1. Calculer $u_{0,0}, u_{1,0}, u_{0,1}, u_{m,0}$.
2. Prouver que 3 est un majorant de A.
3. Justifier que $\sup A = 3$.
4. Justifier que 1 est un minorant de A.
5. Trouver m de manière que $1 < u_{m,0} < 1.001$. Montrer que $1 = \inf A$.

Liste d'exercices n° 2

Convergence de suites

1. Étudier la convergence des suites suivantes, et donner leur limite s'il en est :

1. $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$
2. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$
3. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$ avec $(\alpha > 0)$
4. $u_n = \dfrac{E[nx]}{n}$
5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \sqrt[n]{n}$
7. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

2. On dit qu'*une suite complexe* (z_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Montrer que la suite (z_n) converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites $(Re(z_n))$ et $(Im(z_n))$ convergent dans $\mathbb{R}$.

De plus, montrer qu'une suite complexe convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

3. VRAI-FAUX : Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple :

1. Si (u_n) est une suite telle que (u_n^2) converge. Alors la suite (u_n) converge
2. On suppose de plus que (u_n) est à termes positifs. Alors la suite (u_n) converge
3. Soit (a_n) une suite bornée et (ε_n) une suite convergeant vers 0. Alors la suite de terme général $u_n = \varepsilon_n a_n$ converge vers 0
4. Si (u_n) converge alors $u_{n+1} - u_n \to 0$?
5. Si $u_{n+1} - u_n \to 0$ alors (u_n) converge
6. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \to 0$
7. Si $u_n - v_n \to 0$ alors $u_n \sim v_n$
8. Si (u_n) et (v_n) convergent et si $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors (w_n) converge
9. Si (u_n) est une suite de réels strictement positifs et tend vers zéro, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

4. On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 12,\ \text{et } u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}\ .$$

1. On pose $a_n = v_n - u_n$ et $b_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites géométriques convergentes, et donner leur limite.
2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et préciser leur limite.
3. Montrer directement que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire à l'aide de la première question ?

5. *Critère de* ***D'Alembert*** *pour les suites*

Soit (u_n) une suite de complexes non nuls telle que $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \to \ell$, avec $0 \leq \ell < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.

6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée (on pourra procéder par récurrence).
2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone ; en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.
3. Montrer que
$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2},$$
puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \ .$$
Que peut-on en déduire ?

7. Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ. Trouver une suite non bornée telle que (u_{2n}) converge.
2. On suppose que les trois suites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) sont convergentes. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

8. Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_{n+1} - u_n| \leq k^{-n}, k$ étant un réel vérifiant $0 \leq k < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

9. *Théorème barycentrique de* ***Cesàro***

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On note $S_n := \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors (S_n) aussi. (distinguer 2 cas : $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$).
2. Que dire de (S_n) si (u_n) est bornée ?
3. Trouver une suite (u_n) telle que (S_n) diverge.
4. Montrer que si (u_n) est monotone, la convergence de (S_n) entraîne celle de (u_n).
5. Application : Soit (x_n) une suite telle que $x_{n+1} - x_n \to \ell \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $u_n \sim \ell n$.
6. Application : Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}$. Alors ${u_n}^{\frac{1}{n}} \to \ell$. ("D'Alembert$\Rightarrow$Cauchy").

Limites de fonctions

10. Étudier les limites en x_0 des fonctions suivantes :

1. $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$,
2. $x_0 = +\infty,\ f(x) = x \ln\left(\dfrac{x+\alpha}{x+\beta}\right)$ (α, β réels donnés),
3. $x_0 = 4,\ f(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12}$,
4. $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$,
5. $x_0 = +\infty,\ f(x) = x(\sqrt{1+x^2} - x)$,
6. $x_0 = 1,\ f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$,
7. $x_0 = -\infty,\ f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$,
8. $x_0 = 1,\ f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$.

11. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}, f :]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose : $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant le critère de Cauchy pour les fonctions, montrer que : $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$.
2. En déduire que f admet un prolongement dérivable sur $[a,b]$.

12. On rappelle la propriété suivante où a et b sont dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \text{Pour toute suite } (x_n) \text{ de limite } a\text{, la suite } (f(x_n)) \text{ a pour limite } b.$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.
2. Soit $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ (i.e. $\chi_{\mathbb{Q}}$ vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels). Montrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'admet de limite en aucun point.

13. Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^\alpha \sin x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

1. Trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n^\alpha$ et $f(y_n) = -y_n^\alpha$. En déduire que, pour $\alpha \geq 0, f$ ne peut pas avoir de limite en $+\infty$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ lorsque $\alpha < 0$.

14. Étudier les limites à droite et à gauche en zéro des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{x}{|x|}\,, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x+2|x|}\,, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{\tan x}\,, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}\,, \quad x \mapsto \frac{x \sin x}{1-\cos x}\,.$$

15. On rappelle que, si x est un nombre réel, $E[x]$ désigne sa partie entière. Montrer que $\dfrac{x}{E[x]} \to_{x\to+\infty} 1$.

16. *Une version faible du théorème de **L'Hôpital** (marquis de ...)*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \to_{x\to+\infty} \ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \to_{x\to+\infty} \ell\,.$$

Pour cela, on suit la méthode suivante : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

1. Trouver $a > 0$ tel que
$$\forall x > a, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
2. Montrer que :
$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)}{x} - \frac{a}{x}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$
En déduire :
$$\exists K > 0 \text{ tel que } \forall x > a, \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq \frac{K}{x}\,.$$
(K peut éventuellement dépendre de ε ou a).
3. Conclure.

(Comparer avec l'exercice 9 sur les suites)

Liste d'exercices n° 3

Continuité

1.

1. Les expressions de l'exercice 1, section B, liste 2 (limites de fonctions) définissent-elles des fonctions continues sur leur domaine de définition ? Peuvent-elles se prolonger par continuité au point x_0 (lorsque x_0 est fini) ?
2. Même question avec les expressions suivantes (on pourra utiliser 1.)
1. $f(x) = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$ et $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}$ et $x_0 = 0$ (remarquer que $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ lorsque x est proche de x_0).

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

1. Représenter graphiquement puis étudier la continuité de la fonction f.
2. Déterminer, à l'aide du cours, une condition suffisante pour que l'image par f d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ soit encore un intervalle. Cette condition est-elle nécessaire ?
3. Déterminer tous les intervalles I tels que l'application induite sur I, $f_{|I} : I \to f(I)$, soit bijective. Dans quels cas est-elle continue ? Expliciter alors l'application réciproque $(f_{|I})^{-1} : f(I) \to I$. Est-elle continue ?
4. Pour quelles valeurs du réel a la fonction $g(x) = (x - E(x))(x - E(x) - a)$ est-elle continue ? Précisez alors son graphe.

3. Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 0, f(x) = x^{-1}$ si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $f(x) = x$ si $x \notin Q$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle monotone ? Déterminer son domaine de continuité.

4. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $\mid f \mid$ (la valeur absolue de f) est continue sur I.
2. Exprimer la fonction $\sup(f, g)$ en fonction de $(f+g)$ et $\mid f-g \mid$. En déduire que la fonction $\sup(f, g)$ est continue sur I.

5. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si $f(x) = g(x)$ pour tout nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$, montrer que $f = g$, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$.
2. Si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombre réels (on dit alors que f est additive) et si g désigne l'homothétie de rapport $f(1)$ (*i.e.* la multiplication par $f(1)$), montrer que $f = g$.
3. Si f est additive et aussi multiplicative, c'est à dire $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels, montrer que f est soit nulle soit la fonction identité (on pourra montrer que f est croissante).
4. Si $f(x) \neq 0$ et $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels, montrer que $f(1) > 0$ (on pourra supposer le contraire et étudier la fonction induite par f sur l'intervalle $[1, 2]$) et que $f(x) = f(1)^x := e^{x \ln f(1)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.

1. Soit $f : [a, b[\longrightarrow R$ une fonction continue.
   (a) On suppose que $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ Montrer alors que , pour tout $A > f(a)$, on peut trouver $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = A$.

(b) On suppose que $b = +\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Montrer alors que , pour tout réel A strictement compris entre $f(a)$ et 1, on peut trouver $c > a$ tel que $f(c) = A$.

2. Démontrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

7. Soit f une fonction réelle définie et strictement croissante sur $[a, b]$, et telle que : $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

1. Soit x_0 un point de $[a, b[$. Montrer que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(y)/x_0 < y < b\}$ puis que f est continue à droite en x_0.
2. Montrer de la même manière que f est continue à gauche en $x_0 \in]a, b]$. En déduire que f est continue sur $[a, b]$.

8. Soit k un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \mid f(x) - f(y) \mid \leq k \mid x - y \mid .$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
En utilisant l'exercice 8, section A de la liste 2, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on va noter ℓ. Montrer que $f(\ell) = \ell$ et que ℓ est l'unique point fixe de f.
3. Montrer que ces résultats s'appliquent si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si f' vérifie :
$$\exists k \in]0, 1[\text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \mid f'(x) \mid \leq k .$$
4. Appliquer cette méthode avec la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x + 2}$ et avec $u_0 = 0$ puis comparer avec l'exercice 6, section A de la liste 2.

Intégrales

9. Soient a, b, c, d quatre réels tels que $a < b < c < d$ et soit $f : [a, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, d]$. Montrer la relation suivante :

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d f(x)dx\right) + \left(\int_a^c f(x)dx\right)\left(\int_d^b f(x)dx\right) + \left(\int_a^d f(x)dx\right)\left(\int_b^c f(x)dx\right) = 0$$

(on pourra le montrer d'abord pour $f = 1$ en s'aidant d'un dessin)

10.

1. Soit h une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et telle que $\int_a^b h(t)dt = 0$. Montrer que $h = 0$.
2. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue non nulle telle que $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$. Montrer que $f = 1$, c'est-à-dire : $\forall t \in [0, 1], f(t) = 1$.
3. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe un réel x_0 de $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$ (utiliser le théorème de Rolle).

11. *Inégalité de* ***Cauchy-Schwarz***

Soient f et g deux applications continues $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, a et b étant deux réels tels que $a < b$.

1. Montrer que
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geq 0 .$$
2. En déduire que
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)$$
et que
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 = \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } f + \lambda g = 0 .$$

3. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que $(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$.
   Pour quelles fonctions y a-t-il égalité ?

12. Soit I_n l'intégrale $\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^3+x^3}}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

13. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si $f(0)=0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nt^n f(t^n)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

14. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $2p \in \mathbb{N}$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,\frac{1}{2}}$.
2. Établir une relation de récurrence entre $I_{n,\frac{1}{2}}$ et $I_{n+1,\frac{1}{2}}$ et en déduire $I_{n,\frac{1}{2}}$.
3. Établir une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$ et en déduire $I_{n,p}$.
4. En déduire une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k C_p^k}{n+k+1}$ lorsque $p \in \mathbb{N}$.

15. *Intégrales de* ***Wallis***

Pour $n \geq 0$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Pour $n \geq 2$, montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} , pour $p \in N$.
3. Montrer que, pour $n \geq 1, I_{n-1} \geq I_n > 0$ et que $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$.
4. En déduire la convergence et la limite de la suite :
$$u_p = \left(\frac{1.3.5.\cdots.(2p-1)}{2.4.6.\cdots(2p)}\right)^2 (2p+1)\,.$$
5. Montrer que $\forall p \geq 0\,, I_{2p+1}^2 \leq \frac{\pi}{2(2p+1)}$.
6. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

16. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une application de $[a,b]$ dans R , dérivable sur $[a,b]$ et telle que la fonction dérivée f' soit continue sur $[a,b]$.

Pour $n \in N$, on pose $I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)dx$ et $J_n = \int_a^b f(x)\cos(nx)dx$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

17. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soient f et g deux fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a,b]$. On suppose que la fonction g garde un signe constant sur $[a,b]$. À l'aide de la fonction $F(x) = f(x)\int_a^b g(t)dt$, montrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

18. Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Montrer par un changement de variable que $f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^v}{v}dv$, puis en déduire $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ à l'aide de la formule de la moyenne.

19. *Extrait de l'examen de Juin 1997*

1. En écrivant que, pour tout $x > 0, \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt$, montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x > 1, \ln(x) \leq \dfrac{1}{2q}(x^{\frac{1}{2q}} - 1)$, en déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{q}}} \ln(x) = 0$.
2. Soit $n, m \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on définit la fonction $f_{n,m}$ sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, par $f_{n,m}(0) = 0$ et si $x > 0, f_{n,m}(x) = x^n(\ln(x))^m$. Montrer que $f_{n,m}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. On considère l'intégrale $I(n, m) = (-1)^m \displaystyle\int_0^1 f_{n,m}(x)dx$. Montrer que, si $n \geq 1$, alors $I(n, m) = \dfrac{m}{n+1} I(n, m-1)$. En déduire $I(n, m)$ en fonction de n et m.
4. (a) Si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de la limite $J(m) := \displaystyle\lim_{a \to 0_+} (-1)^m \int_a^1 (\ln(x))^m dx$.
   (b) En intégrant par parties sur $[a, 1]$ et en faisant tendre a vers 0, montrer que, si $m > 0, J(m) = mJ(m-1)$. En déduire la valeur de $J(m)$ en fonction de m.
5. Retrouver le résultat du 4) en faisant le changement de variable $t = \ln(x)$ et en intégrant par parties.

20. *Extrait de l'examen de Mai 1997*

Soit $q \in \mathbb{Q}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^q}}} dx$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ (on pourra encadrer la fonction à intégrer).
2. Calculer la dérivée de $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Université de Nantes **Département de Mathématiques**
DEUG MIAS - Module M2 Analyse **Année 2001/2002**

Liste d'exercices n° 4

1. *Séries géométriques*

Calculer la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ de la série géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. En déduire que cette série est convergente si et seulement si $|r| < 1$ et donner sa somme dans ce cas.

2. *Séries de Riemann*

1. On note $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad |H_{2k} - H_k| \geq \frac{1}{2}.$$
Rappeler le critère de Cauchy de convergence des suites dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la série harmonique est divergente.
2. Pour $\alpha \leq 1$, montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
3. Pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt.$$
En déduire que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

3. *Règle* $\mathbf{n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$'

1. Montrer en utilisant l'exercice 2 que s'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors la série de terme général u_n est convergente.
2. Étudier la nature des séries de terme général suivant :
   (a) $u_n = \frac{\ln n}{\epsilon^n}$.
   (b) $u_n = \frac{n}{a^n}$, pour $a > 0$.

4. *Règle de d'Alembert*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^+.$$
   (a) Si $\ell < 1$, construire des constantes $c > 0, \lambda < 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq c\lambda^n$ pour tout $n \geq k$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
   (b) Si $\ell > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.
   (c) Que penser de ce critère de convergence pour les séries $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$?
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n>0} \frac{n!}{n^n}$?
3. Étudier la nature des séries de terme général $u_n = (2 + (-1)^n)\, 2^{-n}$ et $u_n = 2 + (-1)^n$. Peut-on conclure en général si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite ?

5. *Applications*

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
2. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
3. $\left(\dfrac{n+3}{2n+4}\right)^n$
4. $n^{-\ln(\ln n)}$
5. $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}}$
6. $\dfrac{n^5}{2^{n^2}}$
7. $\dfrac{n^n}{2^{n^2}}$
8. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$
9. $\dfrac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}$

6. *Séries alternées*

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n u_n$. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente.

2. Déterminer la nature de la série de terme général :
   (a) $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) $(-1)^n \exp\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$
   (c) $(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
   (d) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   (e) $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$

7. Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente à termes dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}^+$ et, pour tout n de $\mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. Montrer que, si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
2. Montrer que, si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.
3. Donner un exemple où $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

9. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que, si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

10. *Comparaison d'une série et d'une intégrale*

Soit f une fonction positive continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est définie.

11. *Séries télescopiques*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = a_{n+1} - a_n$ (pour tout n dans $\mathbb{N}$). Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si a_n a une limite finie ℓ. Calculer $\sum_{n\geq 0} u_n$ dans ce cas.

Étudier les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

12. *Évaluation du reste*

On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste au rang n de la série terme général u_n.

1. Évaluer R_n dans les cas suivants :
   (a) la série géométrique $u_n = r^n$ avec $|r| < 1$,
   (b) la série u_n vérifiant (comme dans l'exercice 6)
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Soit $u_n = \left(2 + \dfrac{\sin n}{n}\right)^{-n}$, pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer que $\sum_{n>0} u_n$ est convergente.
   (b) Trouver un entier N tel que
   $$\forall n \geq N, \qquad 0 < \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n} \leq 0.6.$$
   (c) Évaluer le reste dans la série $\sum_{n>0} u_n$ et déduire le nombre de termes à calculer pour connaître $\sum_{n>0} u_n$ au moins à 10^{-6} près.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^3}$ à 10^{-3} près.

13. *Intégrales généralisées*

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{(+\infty)} \varepsilon^{\alpha x} dx\,, \quad \int_0^1 \ln x dx\,, \quad \int_1^{(+\infty)} \frac{dx}{x^\alpha}\,, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}\,, \quad \int_1^{(+\infty)} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx\,.$$

On discutera suivant les valeurs de α réel.