**Liste d'exercices n°1**

# A Exercices fondamentaux

1. Compléter le tableau suivant :

| Avec la valeur absolue | Sur la droite des réels | Inégalités | Intervalle |
|---|---|---|---|
| $\|x\| < 2$ | | | |
| $\|x-4\| \leq 5$ | | | |
| | | | [-5,3] |
| | | $-3 < x < 4$ | |
| $\|x+6\| \geq 2$ | | | |
| | | | $]-1,6[$ |

2. Montrer que pour $x$ et $y$ des nombres réels, on a $||x|-|y|| \leq |x-y|$.
3. On définit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des $x+iy$ avec $x$ et $y \in \mathbb{R}$, muni des opérations habituelles, et on admet que c'est un corps. Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, on note $|z|^2 = x^2+y^2$.
   (a) Montrer que si $w = u+iv$ est un autre nombre complexe, alors :
   $$(|z+w|^2 - |z^2| - |w|^2)^2 \leq (xu+yv)^2 + 4\,(xv-yu)^2 = 4|z|^2|w|^2.$$
   (b) En admettant que tout nombre réel positif possède une racine carrée positive, montrer que $0 \leq a \leq b$ entraîne que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, et en déduire que les modules $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ de nombres complexes vérifient l'*inégalité de convexité* ou *inégalité triangulaire* : $|z+w| \leq |z|+|w|$.
4. A partir de l'axiome des segments emboîtés, démontrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que $\mathbb{R}$ possède la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}_+$, si $x > 1$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n > y$.
5. Déterminer (s'ils existent) les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands ou plus petits éléments des ensembles, fonction ou familles ci-dessous :
   (a) Les ensembles $A = ]-1,2]$, $B = ]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]3,4[\cup\{7\}$, $C = \mathbb{R}_+^*$.
   (b) La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ sur l'intervalle $]0,\frac{2}{\pi}]$.
   (c) Les familles $((-1)^n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(2^{(-1)^n n})_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Soit $A$ une partie majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   – $\forall a \in A, a \leq M$,
   – $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$, avec $M - \epsilon < a$.
   Si on suppose que $A$ est minorée, donner une caractérisation analogue de $\inf A$.
7. Soient $A$ et $B$ deux ensembles de nombres réels, et $c$ un nombre réel. Comparer les bornes des ensembles $A+B = \{\, a+b \in \mathbb{R}\,;\, a \in A \text{ et } b \in B \,\}$ et $c\,A = \{\, c\,a \in \mathbb{R}\,;\, a \in A \,\}$ avec les bornes de $A$ et de $B$.
8. Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J$ un ensemble d'indices.
   (a) Montrer qu'une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée, et qu'une famille $(x_j)_{j\in J}$ de nombres réels est bornée si et seulement si la famille $(|x_j|)_{j\in J}$ est majorée.
   (b) Soient maintenant $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes et $(z_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes. On dit par définition que la fonction $f$ est *bornée* si la fonction réelle $|f|$ est majorée, et que la famille $(z_j)_{j\in J}$ est *bornée* si la famille réelle $(|z_j|)_{j\in J}$ est majorée. Montrer que les fonctions complexes bornées forment un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et que les familles complexes bornées forment un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

(c) Montrer de plus que la fonction complexe $f$ est bornée si et seulement si les deux fonctions réelles $\Re f$ et $\Im f$ sont bornées, et que la famille complexe $(z_j)_{j\in J}$ est bornée si et seulement si les deux familles réelles $(\Re z_j)_{j\in J}$ et $(\Im z_j)_{j\in J}$ sont bornées.

9. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{m,n} = 1/m + 1/n$, et on note $U = \{u_{m,n},\ (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup U$ et $\inf U$.

10. Soient $X$ et $Y$ deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application. On dit que
    - $f$ est surjective si tout élément de $Y$ est l'image d'au moins un élément de $X$, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans $X$,
    - $f$ est injective si tout élément de $Y$ est l'image d'au plus un élément de $X$, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution dans $X$,
    - $f$ est bijective si tout élément de $Y$ est l'image d'exactement un élément de $X$, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a exactement une solution dans $X$ ; autrement dit, $f$ est à la fois surjective et injective.

    Si $Z$ est un troisième ensemble et $g : Y \to Z$ est une application, montrer que

    (a) si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective

    (b) si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

    (c) si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

    (d) si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective

    (e) si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective

11. Soient $X$ et $Y$ deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application.

    (a) Si $A$ et $B$ sont des parties de $X$, montrer que

    i. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

    ii. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

    iii. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

    (b) Si $A'$ et $B'$ sont des parties de $Y$, montrer que

    i. $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

    ii. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

    iii. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

## B Exercices complémentaires

1. Soit $K = \{p + q\sqrt{2} \in \mathbb{R}\,;\, p \in \mathbb{Q} \text{ et } q \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que si $x$ et $y \in K$, alors $x + y$ et $x\,y \in K$. Montrer ensuite que $K$ muni de ces deux opérations est un corps.

2. Le but de l'exercice est de montrer que l'on ne peut pas munir $\mathbb{C}$ d'une relation d'ordre total compatible avec les deux opérations usuelles (addition et multiplication). En supposant qu'il existe sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre total compatible avec ces deux opérations, démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z \geq 0$ ou $z \leq 0$, puis en déduire que $z^2 \geq 0$ dans les deux cas. Montrer ensuite que $1 \geq 0$ et $-1 \geq 0$, et en déduire une contradiction. Conclure.

3. Le but de cet exercice est de montrer que tout intervalle $]a, b[$ non vide contient au moins un rationnel et au moins un irrationnel (on dit alors que les rationnels et les irrationnels sont *denses* dans $\mathbb{R}$). On admettra qu'il existe au moins un irrationnel que l'on notera $x_0$ (un tel irrationnel est implicitement fourni par exemple par l'exercice ci-dessous).

    (a) Premier cas : $a < 0 < b$. Montrer à l'aide de l'axiome des segments emboîtés que $]a, b[$ contient au moins un irrationnel de la forme $x = 2^{-n}x_0$ pour $n$ assez grand.

    (b) Deuxième cas : $0 \leq a < b$. Montrer, toujours à l'aide des segments emboîtés, que $2^{-n} < b - a$ pour $n$ assez grand, et que $2^{-p} < (1/b)$ pour $p$ assez grand. En déduire que l'intervalle $]a, b[$ contient un rationnel $q = k2^{-n}$ pour un entier $k \leq 2^{n+p}$, puis qu'il contient aussi un irrationnel (considérer l'intervalle $]a - q, b - q[$).

(c) Troisième cas : $a < b \leq 0$. Montrer comme dans le cas précédent que cet intervalle contient au moins un nombre rationnel et au moins un nombre irrationnel.

4. Le but de cet exercice est de montrer que les rationnels ne possèdent pas la propriété d'existence de l'axiome des segments emboîtés.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle (par des arguments arithmétiques, en cherchant la solution sous la forme $x = (p/q)$ et en discutant la parité de $p$ et de $q$).
   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$. On pose $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, puis : $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$ si $m_n^2 < 2$ ; $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$ si $m_n^2 > 2$.
   (c) Montrer que $a_n$ et $b_n$ sont rationnels pour tout $n$, que le cas $m_n^2 = 2$ ne se produit pas, et que si $x$ appartient à tous les segments $[a_n, b_n] \cap \mathbb{Q}$, alors $x^2 = 2$.
   Conclure (on pourra aussi en déduire qu'il existe un nombre réel $x \in [1, 2]$ vérifiant $x^2 = 2$, et que ce nombre est irrationnel).
5. On rappelle qu'il n'existe pas de nombre rationnel $x$ vérifiant $x^2 = 2$ (voir exercice ci-dessus). Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ vérifie $x^2 < 2$, alors il existe un nombre *rationnel* $\varepsilon > 0$ tel que $(x + \varepsilon)^2 < 2$. En déduire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} ; x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
6. Pour $f(x) = 3x$ et $g(x) = 1 - 2x$, déterminer sur $I = [0, 1]$ les bornes supérieures et inférieures des fonctions $f$, $g$ et $f + g$. Qu'observe-t-on ?
7. Montrer que pour tous réels $a$ et $b$, $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et étudier le cas d'égalité. Déterminer (s'ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de l'ensemble $E = \{ab \in \mathbb{R} ; a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+ \text{ et} a^2 + b^2 = 6\}$.
8. Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $V$ contient un voisinage de $x$, alors $V$ lui-même est un voisinage de $x$. Montrer que l'intersection de deux voisinages de $x$ est encore un voisinage de $x$, et que c'est aussi vrai pour l'intersection d'un nombre fini de voisinages de $x$. Ce résultat est-il toujours vrai pour une famille infinie de voisinages de $x$ ?
9. Soient $A$ et $B$ deux ensembles de nombres réels, et $c$ un nombre réel. Comparer les bornes des ensembles $A + B = \{a + b \in \mathbb{R} ; a \in A \text{ et } b \in B\}$ et $cA = \{ca \in \mathbb{R} ; a \in A\}$ avec les bornes de $A$ et de $B$.
10. Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des nombres réels. Déterminer la borne inférieure de la fonction $f(x) = \sum_{j=1}^{n} |x - a_j|$ lorsque $x$ parcourt $\mathbb{R}$ (on pourra étudier cette fonction sur les intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, puis distinguer le cas où $n$ est pair du cas où $n$ est impair).

## C Exercices d'entraînement

1. Montrer que les rationnels possèdent la propriété d'unicité de l'axiome des segments emboîtés, c'est-à-dire montrer que si $([a_n, b_n] \cap \mathbb{Q})$ est une suite de segments emboîtés *de nombres rationnels* telle que chaque segment soit de longueur moitié de celle du précédent, alors il existe au plus un rationnel appartenant à tous ces segments (utiliser l'axiome des segments emboîtés dans $\mathbb{R}$).
2. Soit $A$ un ensemble de nombres réels. Montrer que si $A$ possède un plus grand élément, alors c'est sa borne supérieure. Réciproquement, montrer que si $\sup(A)$ appartient à $A$, alors c'est le plus grand élément de $A$.
3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.
   - Donner sans calcul un majorant et un minorant évidents de $f$.
   - En mettant $f(x)$ sous la forme $A\cos(x + \varphi)$, déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $f$.
4. Montrer que le théorème de la borne supérieure permet de faire la liste des intervalles donnée dans le préambule du cours. Plus précisément :
   (a) Si l'intervalle $I$ est borné, notons $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Montrer que pour tout $x$ vérifiant $a < x < b$, $I$ contient au moins un élément $> x$ et au moins un élément $< x$, et en déduire que $x \in I$.
   En discutant l'appartenance de $a$ et de $b$ à $I$, en déduire que $I$ est l'un des intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$.

(b) Si l'intervalle $I$ est majoré mais pas minoré, notons $b = \sup(I)$. Montrer que pour tout $x < b$, $x \in I$, et en déduire que $I = ]-\infty, b[$ ou $I = ]-\infty, b]$.
   Raisonner de même si $I$ est minoré non majoré, et encore de même si $I$ n'est ni majoré ni minoré.

5. Soient $X$, $Y$, $Z$ trois ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que
   (a) Si $g \circ f$ est bijective, alors $f$ est injective et $g$ est surjective
   (b) Si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective, alors $g$ est injective
   (c) Si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ est surjective
6. Soient $X$, $Y$ deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.
   (a) Etablir que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
      i. $f$ est injective
      ii. Pour toutes les parties $A$ et $B$ de $X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
   (b) Montrer que pour toute partie $A$ de $X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$, puis établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :
      i. $f$ est injective
      ii. Pour toute partie $A$ de $X$, $A = f^{-1}(f(A))$
7. Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que si une fonction $f : I \to J$ est strictement croissante et bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi strictement croissante. Montrer que $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et en admettant qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, en déduire que sa réciproque, la fonction *racine carrée*, est strictement croissante.
8. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on note
$$u_{m,n} = \frac{m + 2n + 3}{m + n + 1},$$
   et on appelle $A$ l'ensemble $\{u_{m,n},\ (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$.
   (a) Calculer $u_{0,0}$, $u_{1,0}$, $u_{0,1}$, $u_{m,0}$.
   (b) Prouver que 3 est un majorant de $A$.
   (c) Justifier que $\sup A = 3$.
   (d) Justifier que 1 est un minorant de $A$.
   (e) Trouver $m$ de manière que $1 < u_{m,0} < 1.001$. Montrer que $1 = \inf A$.