Université de Nantes
Département de Mathématiques
Analyse

DEUG MIAS Module M2
Année 2001/2002

Liste d'exercices n° 2

A . Convergence de suites

Exercice 1 Étudier la convergence des suites suivantes, et donner leur limite s'il en est :

$$a)\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}; \qquad b)\ u_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}; \qquad c)\ u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}\ (\alpha > 0);$$

$$d)\ u_n = \frac{E[nx]}{n}; \qquad e)\ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}; \qquad f)\ u_n = \sqrt[n]{n}; \qquad g)\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 2 On dit qu'une suite complexe (z_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - l| \leq \varepsilon.$$

Montrer que la suite (z_n) converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites $(Re(z_n))$ et $(Im(z_n))$ convergent dans $\mathbb{R}$.
De plus, montrer qu'une suite complexe convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 3 VRAI-FAUX : Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple :

1. " Si (u_n) est une suite telle que (u_n^2) converge. Alors la suite (u_n) converge"
2. " On suppose de plus que (u_n) est à termes positifs. Alors la suite (u_n) converge "
3. " Soit (a_n) une suite bornée et (ε_n) une suite convergeant vers 0. Alors la suite de terme général $u_n = \varepsilon_n a_n$ converge vers 0"
4. " Si (u_n) converge alors $u_{n+1} - u_n \to 0$? "
5. " Si $u_{n+1} - u_n \to 0$ alors (u_n) converge "
6. " Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \to 0$ "
7. " Si $u_n - v_n \to 0$ alors $u_n \sim v_n$ "
8. " Si (u_n) et (v_n) convergent et si $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors (w_n) converge "
9. " Si (u_n) est une suite de réels strictement positifs et tend vers zéro, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang."

Exercice 4 On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 12,\ \text{et}\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1) On pose $a_n = v_n - u_n$ et $b_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites géométriques convergentes, et donner leur limite.

2) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et préciser leur limite.
3) Montrer directement que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire à l'aide de la première question ?

Exercice 5 (Critère de **D'Alembert** pour les suites)
Soit (u_n) une suite de complexes non nuls telle que $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \to l$, avec $0 \leq l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
1) Montrer que la suite (u_n) est bornée (on pourra procéder par récurrence).
2) Démontrer que la suite (u_n) est monotone; en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.
3) Montrer que

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2},$$

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \ .$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 7 Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que la suite (u_n) converge vers l si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l .Trouver une suite non bornée telle que (u_{2n}) converge.
2) On suppose que les trois suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 8 Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_{n+1} - u_n| \leq k^{-n}$, k étant un réel vérifiant $0 \leq k < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 9 (Théorème barycentrique de **Cesàro**)
Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On note $S_n := \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
1) Montrer que si (u_n) converge vers l dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors (S_n) aussi.
(distinguer 2 cas : $l \in \mathbb{R}$ et $l \in \{+\infty, -\infty\}$).
2) Que dire de (S_n) si (u_n) est bornée?
3) Trouver une suite (u_n) telle que (S_n) diverge.
4) Montrer que si (u_n) est monotone, la convergence de (S_n) entraîne celle de (u_n).
5) Application : Soit (x_n) une suite telle que $x_{n+1} - x_n \to l \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $u_n \sim \lambda n$.
6) Application : Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda \in \mathbb{R}$. Alors ${u_n}^{\frac{1}{n}} \to \lambda$. ("D'Alembert⇒Cauchy").

B . Limites de fonctions

Exercice 1 Étudier les limites en x_0 des fonctions suivantes :

$$a) x_0 = 0,\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}; \quad b) x_0 = +\infty,\ f(x) = x \ln\left(\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right) (\alpha, \beta \text{ réels donnés}) \ ;$$

$$c) x_0 = 4,\ f(x) = \frac{x-4}{x^2 - x - 12}; \quad d) x_0 = 0,\ f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$e) x_0 = +\infty,\ f(x) = x(\sqrt{1+x^2} - x); \quad f) x_0 = 1,\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3};$$

$$g) x_0 = -\infty,\ f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}; \qquad h) x_0 = 1,\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}.$$

Exercice 2 Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose : $\exists \lim_{x \to a^+} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant le critère de Cauchy pour les fonctions, montrer que : $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$.
2. En déduire que f admet un prolongement dérivable sur $[a, b]$.

Exercice 3 On rappelle la propriété suivante où a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$:

$\exists \lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow$ Pour toute suite (x_n) de limite a, la suite $(f(x_n))$ a pour limite b.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.
2. Soit $\chi_{\mathcal{Q}}$ la fonction indicatrice de $\mathcal{Q}$ (i.e. $\chi_{\mathcal{Q}}$ vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels). Montrer que $\chi_{\mathcal{Q}}$ n'admet de limite en aucun point.

Exercice 4 Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^\alpha \sin x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

1. Trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n^\alpha$ et $f(y_n) = -y_n^\alpha$. En déduire que, pour $\alpha \geq 0$, f ne peut pas avoir de limite en $+\infty$.
2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ lorsque $\alpha < 0$.

Exercice 5 Étudier les limites à droite et à gauche en zéro des fonctions suivantes :
$x \mapsto \frac{x}{|x|}$; $x \mapsto \frac{\sin x}{x+2|x|}$; $x \mapsto \frac{\sin x}{\tan x}$; $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$; $x \mapsto \frac{x \sin x}{1-\cos x}$.

Exercice 6 On rappelle que, si x est un nombre réel, $E[x]$ désigne sa partie entière.
Montrer que $\dfrac{x}{E[x]} \to_{x \to +\infty} 1$.

Exercice 7 Une version faible du théorème de **L'Hôpital** (marquis de ...)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \to_{x \to +\infty} l \in \mathbb{R}$.
On veut montrer que : $\dfrac{f(x)}{x} \to_{x \to +\infty} l$.
Pour cela, on suit la méthode suivante : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

1. Trouver $a > 0$ tel que $\forall x > a$: $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que : $\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)}{x} - \frac{a}{x}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
   En déduire : $\exists K > 0$ tel que $\forall x > a$, $|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \leq \frac{K}{x}$.
   (K peut éventuellement dépendre de ε ou a).
3. Conclure.

(Comparer avec l'exercice 9 sur les suites)