Faculté des Sciences et des Techniques **Année 2001/2002**
Département de Mathématiques **DEUG A, M2, Analyse**

Liste d'exercices 3

A. Continuité

Exercice 1

1. Les expressions de l'exercice 1, section B, liste 2 (limites de fonctions) définissent-elles des fonctions continues sur leur domaine de définition ? Peuvent-elles se prolonger par continuité au point x_0 (lorsque x_0 est fini) ?

2. Même question avec les expressions suivantes (on pourra utiliser 1.)

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}$ et $x_0 = 0$.

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}$ et $x_0 = 0$ (remarquer que $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ lorsque x est proche de x_0).

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

1. Représenter graphiquement puis étudier la continuité de la fonction f.

2. Déterminer, à l'aide du cours, une condition suffisante pour que l'image par f d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ soit encore un intervalle. Cette condition est-elle nécessaire?

3. Déterminer tous les intervalles I tels que l'application induite sur I, $f_{|I} : I \to f(I)$, soit bijective. Dans quels cas est-elle continue ? Expliciter alors l'application réciproque $(f_{|I})^{-1} : f(I) \to I$. Est-elle continue ?

4. Pour quelles valeurs du réel a la fonction $g(x) = (x - E(x))(x - E(x) - a)$ est-elle continue ? Précisez alors son graphe.

Exercice 3 Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 0, f(x) = x^{-1}$ si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $f(x) = x$ si $x \notin Q$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle monotone ? Déterminer son domaine de continuité.

Exercice 4 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $\mid f \mid$ (la valeur absolue de f) est continue sur I.

2. Exprimer la fonction $\mathrm{Sup}(f, g)$ en fonction de $(f + g)$ et $\mid f - g \mid$.
   En déduire que la fonction $\mathrm{Sup}(f, g)$ est continue sur I .

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si $f(x) = g(x)$ pour tout nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$, montrer que $f = g$, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$.

2. Si $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombre réels (on dit alors que f est additive) et si g désigne l'homothétie de rapport $f(1)$ (*i.e.* la multiplication par $f(1)$), montrer que $f = g$.

3. Si f est additive et aussi multiplicative, c'est à dire $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels, montrer que f est soit nulle soit la fonction identité (on pourra montrer que f est croissante).

4. Si $f(x) \neq 0$ et $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout couple (x,y) de nombres réels, montrer que $f(1) > 0$ (on pourra supposer le contraire et étudier la fonction induite par f sur l'intervalle $[1,2]$) et que $f(x) = f(1)^x := e^{x \ln f(1)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

1. Soit $f : [a,b[\longrightarrow R$ une fonction continue.
   (a) On suppose que $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ Montrer alors que , pour tout $A > f(a)$, on peut trouver $c \in [a,b[$ tel que $f(c) = A$.
   (b) On suppose que $b = +\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer alors que , pour tout réel A strictement compris entre $f(a)$ et 1, on peut trouver $c > a$ tel que $f(c) = A$.
2. Démontrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 7 Soit f une fonction réelle définie et strictement croissante sur $[a,b]$, et telle que : $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

1. Soit x_0 un point de $[a,b[$. Montrer que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \text{Inf}\{f(y) \ / \ x_0 < y < b\}$ puis que f est continue à droite en x_0 .
2. Montrer de la même manière que f est continue à gauche en $x_0 \in]a,b]$. En déduire que f est continue sur $[a,b]$.

Exercice 8 Soit k un réel de l'intervalle $]0,1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \forall y \in \mathbb{R} \quad | \ f(x) - f(y) \ | \leq k \ | \ x - y \ | \quad .$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. En utilisant l'exercice 8, section A de la liste 2, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on va noter l. Montrer que $f(l) = l$ et que l est l'unique point fixe de f .
3. Montrer que ces résultats s'appliquent si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si f' vérifie :
   $\exists k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ | \ f'(x) \ | \leq \ k$.
4. Appliquer cette méthode avec la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et avec $u_0 = 0$ puis comparer avec l'exercice 6, section A de la liste 2.

B. Intégrales

Exercice 1 Soient a,b,c,d quatre réels tels que $a < b < c < d$ et soit $f : [a,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,d]$. Montrer la relation suivante:

$$\Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_c^d f(x)dx\Big) + \Big(\int_a^c f(x)dx\Big)\Big(\int_d^b f(x)dx\Big) + \Big(\int_a^d f(x)dx\Big)\Big(\int_b^c f(x)dx\Big) = 0$$

(on pourra le montrer d'abord pour $f = 1$ en s'aidant d'un dessin)

Exercice 2

1. Soit h une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et telle que $\displaystyle\int_a^b h(t)dt = 0$. Montrer que $h = 0$.

2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue non nulle telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$. Montrer que $f = 1$, c'est-à-dire : $\forall t \in [0,1], f(t) = 1$.

3. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe un réel x_0 de $[0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$ (utiliser le théorème de Rolle) .

Exercice 3 Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soient f et g deux applications continues $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, a et b étant deux réels tels que $a < b$.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geq 0$.

2. En déduire que $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)$ et que $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 = \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda g = 0$.

3. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$. Pour quelles fonctions y a-t-il égalité ?

Exercice 4
Soit I_n l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^3 + x^3}}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 5 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si $f(0) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = 0$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nt^n f(t^n)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $2p \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,\frac{1}{2}}$.

2. Etablir une relation de récurrence entre $I_{n,\frac{1}{2}}$ et $I_{n+1,\frac{1}{2}}$ et en déduire $I_{n,\frac{1}{2}}$.

3. Etablir une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$ et en déduire $I_{n,p}$.

4. En déduire une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \frac{1}{n+k+1}$ lorsque $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Intégrales de Wallis

Pour $n \geq 0$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1)Pour $n \geq 2$, montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

2)En déduire I_{2p} et I_{2p+1} , pour $p \in N$.

3)Montrer que, pour $n \geq 1$, $I_{n-1} \geq I_n > 0$ et que $1 \leq \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{I_{n-1}}{I_{n+1}} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$.

4)En déduire la convergence et la limite de la suite : $u_p = \Big(\dfrac{1.3.5.\cdots.(2p-1)}{2.4.6.\cdots(2p)}\Big)^2 (2p+1)$.

5)Montrer que $\forall p \geq 0$, $I_{2p+1}^2 \leq \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.

6)En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 8 Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une application de $[a, b]$ dans R , dérivable sur $[a, b]$ et telle que la fonction dérivée f' soit continue sur $[a, b]$.

Pour $n \in N$, on pose $I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)dx$ et $J_n = \int_a^b f(x)\cos(nx)dx$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Exercice 9 Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soient f et g deux fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que la fonction g garde un signe constant sur $[a, b]$.

A l'aide de la fonction $F(x) = f(x)\int_a^b g(t)dt$, montrer qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$.

Montrer par un changement de variable que $f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \dfrac{e^v}{v} dv$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ à l'aide de la formule de la moyenne.

Exercice extrait de l'examen de Juin 1997

1. En écrivant que, pour tout $x > 0$, $ln(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t}dt$, montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x > 1$, $ln(x) \leq \dfrac{1}{2q}(x^{\frac{1}{2q}} - 1)$, en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{q}}} ln(x) = 0$.

2. Soit n, $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on définit la fonction $f_{n,m}$ sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, par $f_{n,m}(0) = 0$ et si $x > 0$, $f_{n,m}(x) = x^n(ln(x))^m$. Montrer que $f_{n,m}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. On considère l'intégrale $I(n, m) = (-1)^m \int_0^1 f_{n,m}(x)dx$. Montrer que, si $n \geq 1$, alors $I(n, m) = \dfrac{m}{n+1} I(n, m-1)$. En déduire $I(n, m)$ en fonction de n et m.

4. (a) Si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de la limite $J(m) := \lim\limits_{a\to0_+} (-1)^m \int_a^1 (ln(x))^m dx$.

   (b) En intégrant par parties sur $[a, 1]$ et en faisant tendre a vers 0, montrer que, si $m > 0$, $J(m) = mJ(m-1)$. En déduire la valeur de $J(m)$ en fonction de m.

5. Retrouver le résultat du 4) en faisant le changement de variable $t = ln(x)$ et en intégrant par parties.

Exercice extrait de l'examen de Mai 1997 Soit $q \in \mathbb{Q}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^q}}}dx$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ (on pourra encadrer la fonction à intégrer).

2. Calculer la dérivée de $ln(x+\sqrt{1+x^2})$. En déduire la valeur de u_n en fonction de n .