Université de Nantes **Département de mathématiques**
DEUG MIAS - Module M2 Analyse **Année 2001/2002**

Liste d'exercices
Séries numériques et familles sommables

Exercice 1. Séries géométriques

Calculer la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ de la série géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. En déduire que cette série est convergente si et seulement si $|r| < 1$ et donner sa somme dans ce cas.

Exercice 2. Séries de Riemann

1. On note $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad |H_{2k} - H_k| \geq \frac{1}{2}.$$
Rappeler le critère de Cauchy de convergence des suites dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la série harmonique est divergente.
2. Pour $\alpha \leq 1$, montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
3. Pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt.$$
En déduire que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 3. Règle $\mathbf{n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

1. Montrer en utilisant l'exercice 2 que s'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors la série de terme général u_n est convergente.
2. Etudier la nature des séries de terme général suivant :

   (a) $u_n = \frac{\ln n}{e^n}$. (b) $u_n = \frac{n}{a^n}$, pour $a > 0$.

Exercice 4. Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+.$$
   (a) Si $l < 1$, construire des constantes $c > 0$, $\lambda < 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq c\lambda^n$ pour tout $n \geq k$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

   (b) Si $l > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.

   (c) Que penser de ce critère de convergence pour les séries $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$?
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n>0} \frac{n!}{n^n}$?

3. Etudier la nature des séries de terme général $u_n = (2 + (-1)^n)\, 2^{-n}$ et $u_n = 2 + (-1)^n$. Peut-on conclure en général si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite ?

Exercice 5. Applications

Determiner la nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$
2. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
3. $\left(\dfrac{n+3}{2n+4}\right)^{n}$
4. $n^{-\ln(\ln n)}$
5. $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3 + n - 1}}$
6. $\dfrac{n^5}{2^{n^2}}$
7. $\dfrac{n^n}{2^{n^2}}$
8. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$
9. $\dfrac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}$

Exercice 6. Séries alternées

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n u_n$. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente.
2. Determiner la nature de la série de terme général :
   (a) $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) $(-1)^n \exp\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$
   (c) $(-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
   (d) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   (e) $\dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$

Exercice 7.

Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente à termes dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

Exercice 8.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}^+$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$.

1. Montrer que, si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
2. Montrer que, si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.
3. Donner un exemple où $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Exercice 9.

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que, si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercice 10. Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit f une fonction positive continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est définie.

Exercice 11. Séries télescopiques

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = a_{n+1} - a_n$ (pour tout n dans $\mathbb{N}$). Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si a_n a une limite finie l. Calculer $\sum_{n\geq 0} u_n$ dans ce cas.

Étudier les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Exercice 12. Évaluation du reste

On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste au rang n de la série terme général u_n.

1. Évaluer R_n dans les cas suivants :
   (a) la série géométrique $u_n = r^n$ avec $|r| < 1$,
   (b) la série u_n vérifiant (comme dans l'exercice 6)
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Soit $u_n = \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n}$, pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer que $\sum_{n>0} u_n$ est convergente.
   (b) Trouver un entier N tel que
   $$\forall n \geq N, \qquad 0 < \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n} \leq 0.6.$$
   (c) Évaluer le reste dans la série $\sum_{n>0} u_n$ et déduire le nombre de termes à calculer pour connaître $\sum_{n>0} u_n$ au moins à 10^{-6} près.
3. Calculer $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^3}$ à 10^{-3} près.

Exercice 13. Intégrales généralisées

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} dx$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$.
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.