Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année universitaire 2001-2002
Deug MIAS

Unité de Mathématiques M2
Contrôle continu du 23 Mars 2002 - Durée 2 heures

Document autorisé :
résumé de cours sur une feuille recto/verso 21x29.7 manuscrite

Les calculatrices sont interdites.
Il sera tenu compte de la présentation ainsi que de la rédaction.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (y,z,0)\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base du noyau $\mathrm{Ker} f$ et de l'image $\mathrm{Im} f$ de cet endomorphisme. Préciser leurs dimensions.
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?
5. Déterminer les applications f^2 et f^3. On pose $a_1 = f^2(e_3)$ et $a_2 = f(e_3)$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que la famille (a_1, a_2, e_3) est libre.

T.S.V.P.

Exercice 2

1. Soit $F : [0, +\infty[\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}, \quad x \in [0, +\infty[\setminus\{2\} \ .$$

   Étudier la limite de la fonction F quand x tend vers 2.

2. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$G(x) = \ln\Big(2 + \cos(x)\Big), \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

   Montrer que la fonction G n'admet pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par la relation de récurrence suivante:

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \ \text{ pour tout } \ n \geq 0\,, \qquad \text{avec} \ \ u_0 = 0 \ \text{ et } \ u_1 = 1 \ .$$

On pose $w_n = u_n - u_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Montrer que (w_n) est une suite géométrique.
3. En déduire que (u_n) est une suite convergente et calculer sa limite.