Université de Nantes
Département de Mathématiques

Deug A, M2 - Analyse
Année 2000/2001

Devoir n°1.

A rendre dans la semaine du 11/02.
Chaque question doit être justifiée de façon précise et rigoureuse !
La rédaction est prise en compte dans la note finale.

Analyse

Exercice 1.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x^2 \text{ et } x \geqslant y^2\}$, $S = \{x + y : (x,y) \in D\}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application réelle définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \ln(1 + t^2)$.

1) Donner les représentations graphiques de D dans $\mathbb{R}^2$ et S dans $\mathbb{R}$. On justifiera soigneusement les dessins à partir des définitions respectives de D et S.

2) Montrer que les bornes supérieures et inférieures des parties S et $\varphi(S)$ de $\mathbb{R}$ existent et les calculer.

Exercice 2.

Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $u_{m,n} = \dfrac{m + 2n + 3}{m + n + 1}$ et on appelle A l'ensemble $\{u_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$.

1) Calculer $u_{0,0}$, $u_{1,0}$, $u_{0,1}$ et $u_{m,0}$.

2) Prouver que 3 est un majorant de A.

3) Justifier que $\sup A = 3$.

4) Justifier que 1 est un minorant de A.

5) Trouver m tel que $1 < u_{m,0} < 1,001$ et montrer que $\inf A = 1$.

Algèbre

Exercice 3.

Soit $F(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on note :
$F_x(\mathbb{R}) = \{f \in F(\mathbb{R}) : f(x) = 0\}$.

1) Montrer que $F(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_x(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R})$.

3) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_x(\mathbb{R}) \cap F_y(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R})$ mais que ce n'est pas toujours le cas pour $F_x(\mathbb{R}) \cup F_y(\mathbb{R})$.

Indication : Considérer un cas particulier en posant par exemple $x = 0$, $y = 1$ et choisir convenablement $f \in F_x(\mathbb{R})$, $g \in F_y(\mathbb{R})$, λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda f + \mu g \notin F_x(\mathbb{R}) \cup F_y(\mathbb{R})$.

4) Soit $P = \{f \in F(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = f(-x)\}$ le sous-ensemble de $F(\mathbb{R})$ des applications paires et $I = \{f \in F(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = -f(-x)\}$ le sous-ensemble de $F(\mathbb{R})$ des applications impaires. Après avoir vérifié que P et I sont des sous-espaces vectoriels de $F(\mathbb{R})$, montrer que l'on a : $F(\mathbb{R}) = P \oplus I$.

Exercice 4.

Soient P et Q les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ definis par :

$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$,

$Q = Vect\{v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (-2, 2, -1), v_3 = (4, -1, -1)\}$.

1) Déterminer une base de chacun des espaces P et Q.

2) Soit $v = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition suffisante sur x, y et z pour que $v \in Q$.

3) Déduire de ce qui précède une base de $P \cap Q$ que l'on complétera en une base de $P + Q$.