Correction du devoir libre 2

Exercice 1.

1. D'après la définition de « $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ », il existe $A \geq a$ tel que, pour tout $x \geq A$, on ait $|f(x)| \leq 1$.
2. Soit $A \geq a$ choisi comme dans la question 1. Comme f est continue sur $[a, +\infty[$, f est aussi continue sur $[a, A]$. D'après un théorème du cours, f est donc bornée sur $[a, A]$. Notons M un majorant de f (c'est à dire que $|f(x)| \leq M$ pour x dans $[a, A]$). On a donc, grâce à la question 1.,
$$\forall x \in [a, +\infty[, \qquad |f(x)| \leq \max(M,\, 1)\,,$$
c'est à dire que f est bornée.

Exercice 2.

1-a. Pour n dans $\mathbb{N}^\star$, et $0 \leq x \leq 1$, on a successivement :
$$1 \leq \mathrm{ch}(x) \leq \mathrm{ch}(1), \quad x^n \leq \mathrm{ch}(x)x^n \leq \mathrm{ch}(1)x^n,$$
soit, en intégrant :
$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \mathrm{ch}(x)x^n dx \leq \int_0^1 \mathrm{ch}(1)x^n dx,$$
c'est à dire :
$$I_n \leq J_n \leq I_n\mathrm{ch}(1), \qquad n \in \mathbb{N}^\star.$$

1-b. On a
$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'après le théorème « des gendarmes », J_n converge et sa limite est 0.

1-c. Comme dans 1-a., on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $0 \leq x \leq 1$
$$0 \leq \mathrm{sh}(x) \leq \mathrm{sh}(1), \quad 0 \leq \mathrm{sh}(x)x^n \leq \mathrm{sh}(1)x^n,$$
soit, en intégrant :
$$0 \leq \int_0^1 \mathrm{sh}(x)x^n dx \leq \int_0^1 \mathrm{sh}(1)x^n dx,$$
soit
$$0 \leq K_n \leq I_n\mathrm{sh}(1), \qquad n \in \mathbb{N}^\star.$$
Comme dans 1-b., on en déduit que K_n converge et que 0 est sa limite.

2-a. Par intégration par parties, on a, pour n dans $\mathbb{N}^\star$:
$$L_n = n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{ch}(x)\right]_0^1 - n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{sh}(x)dx = \frac{n}{n+1}\left(\mathrm{ch}(1) - K_{n+1}\right).$$

2-b. On a $K_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc L_n converge et sa limite est $\mathrm{ch}(1)$.

Exercice 3

1. On calcule :
$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -6 & 7 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -12 & 13 & 9 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On remarque que
$$A^3 - 2A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$
soit
$$A^3 - 2A^2 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3.$$
Le polynôme $P = 2 - X - 2X^2 + X^3$ répond à la question.

3. On en déduit que $I_3 = \dfrac{1}{2}(A + 2A^2 - A^3) = A\,\dfrac{1}{2}(I_3 + 2A - A^2)$. Donc A est inversible et son inverse est
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(I_3 + 2A - A^2\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. La matrice de f^3 dans la base $\mathcal{B}$ est A^3. On a
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On en déduit que f^3 est l'endomorphisme nul (le seul dont la matrice est nulle).

2. Cherchons l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$, de coordonées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, qui vérifient $f(x) = 0$, c'est à dire $AX = 0$. On a $AX = 0 \Leftrightarrow y = 0,\ z = x$, le noyau de f est donc l'espace vectoriel de dimension 1 défini par
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)\,, \quad \text{où } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On sait donc que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. On vérifie que les vecteurs
$$v = f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } u = f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
sont linéairement indépendants. Ils sont tous les deux dans $\mathrm{Im}(f)$, donc
$$(v,\, u) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).$$

La matrice de f^2 est A^2. Sont noyau est l'ensemble des x de $\mathbb{R}^3$ tels que $A^2X = 0$, où X sont les coordonées de x dans la base $\mathcal{B}$. avec les notations précédentes, on a $A^2X = 0 \Leftrightarrow x = z$. Le noyau de f^2 est donc le sous espace vectoriel de dimension 2 dont $(v,\, u)$ est une base.

3. On voit donc que $v = e_2 = c_2$ appartient à la fois à $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Soit c_1 le vecteur de coordonées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$f(c_1) = c_2 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } z - x = 1.$$

   On peut prendre, par exemple $z = 2$ et $x = 1$. dans ce cas, $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vérifions maintenant que $c_1 \notin \mathrm{Ker}(f^2)$, c'est à dire que (v, u, c_1) sont linéairement indépendants :

$$\alpha u + \beta v + \gamma c_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

   donc c_1 répond à la question.
5. On a $c_3 = f(c_2) = f(e_2) = u$ (voir ci-dessus). On a vu en 4. que $(c_1, v, u) = (c_1, c_2, c_3)$ est une famille libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
6. On a $f(c_1) = c_2$, $f(c_2) = c_3$ et $f(c_3) = f^2(c_2) = f^3(c_1) = 0$ (puisque $f^3 = 0$). Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On a $e_2 = c_2$, $c_1 = e_1 + 2e_3$, et $c_3 = e_1 + e_3$. Les deux dernières relations donnent $e_3 = c_1 - c_3$, puis $e_1 = 2c_3 - c_1$. La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ est donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. On vérifie par le calcul que $P^{-1}AP = A'$.