Université de Nantes
Mathématiques

Interrogation écrite
7 mars 2002

Deug MIAS –M2
Année 2001-2002

Durée : 45 minutes

Le sujet comprend deux pages, sur lesquelles la solution sera rédigée. Ni documents ni calculette autorisés. Les réponses seront soigneusement justifiées.

Nom : **Prénom** : **N° de groupe de TD** :

I

Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$A = \left\{ x - \frac{1}{n}, \quad x \in \mathbb{Q}\,, 0 \leq x \leq 1\,, n \in \mathbb{N}\,, n > 0 \right\}.$$

(**1**) Montrer que la borne inférieure $\inf A$ de A est égale à -1. Est-elle atteinte ?

(**2**) Montrer que la borne supérieure $\sup A$ de A est égale à 1. Est-elle atteinte ?

(**3**) Donner une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui soit convergente, avec $\lim_{k\to\infty} u_k = \inf A$.

(**4**) Donner une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui soit convergente, avec $\lim_{k\to\infty} v_k = \sup A$.

II

Soit T l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 2 :

$$T = \{P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \ : \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}\,.$$

(**1**) Quelle est la dimension d de l'espace vectoriel T ? Donner un isomorphisme de T sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$.

(**2**) La famille $(X+1, 2X+2, 5X+4)$ est-elle libre dans T ?

(**3**) La famille $((X-1)^2, X^2, 1)$ est-elle une base de T ?

(**4**) Pour un polynôme Q, on note $\widetilde{Q}$ le polynôme défini par

$$\widetilde{Q}(X) = Q((X+1)^2) + Q((X-1)^2) - 2Q(X^2)\,.$$

Si Q est de degré au plus 2, on vérifie (et on ne demande pas de démontrer) que $\widetilde{Q}$ est de de degré au plus 2. Soit f l'application de T dans lui même telle que $f(Q) = \widetilde{Q}$ si Q est un trinôme de T. Montrer que f est un endomorphisme de T.