Liste d'exercices 3
Exercices fondamentaux

Exercice 1 Déterminer tous les produits possibles de deux matrices(y compris les carrés) parmi les matrices suivantes, puis les inverses de ces matrices lorsqu'elles sont inversibles(on pourra utiliser les calculs effectués) :
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$A_5 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Calculer ${}^tA_1, {}^tA_2, {}^tA_1.{}^tA_2$. Que constate-t-on ?
Calculer $A_2 + {}^tA_1, 2A_2 + 3{}^tA_1$.

Exercice 2 Soient les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ définies par :

$$f((x, y, z)) = (x + 2y + 3z, y + 2z) \ , \ g((x, y)) = (x - y, x - 2y, x - 3y)$$

1. Donner, dans les bases canoniques $b = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $c = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice M de f et la matrice N de g.
2.(a) Calculer la matrice A de $g \circ f$ dans la base c et la matrice D de $f \circ g$ dans la base b.
(b) En déduire l'expression de $(g \circ f)((x, y, z))$ et de $(f \circ g)((x, y))$. Faire la vérification.
3. Montrer que l'application $f \circ g$ est bijective. En déduire que la matrice D est inversible et calculer D^{-1}.

Exercice 3 Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice, dans la base canonique
$b = (e_1, e_2, e_3) : A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On pose : $c_1 = e_2 + e_3, c_2 = e_1 + e_3, c_3 = e_1 + e_2$.
1. Montrer que $c = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice B de f dans cette base.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer B^n et en déduire A^n.
3. On considère les trois suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = 2x_n, y_{n+1} = x_n+3y_n-z_n, z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$.
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 4 Soit $b = (b_1, b_2)$ (resp. $c = (c_1, c_2, c_3)$) une base d'un espace vectoriel E (resp. F) et $M_{b,c}(f)$ la matrice suivante d'une application f de E dans F relativement aux bases b et c : $M_{b,c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
1. Montrer que $\widetilde{b} = (3b_1 + b_2, -2b_1 + 5b_2)$ est une base de E.
2. Montrer que $\widetilde{c} = (-c_1 + c_3, 2c_1 - c_2 + 2c_3, c_1 - c_2 + c_3)$ est une base de F.
3. Calculer la matrice $M_{\widetilde{b},\widetilde{c}}(f)$ de f relativement aux bases $\widetilde{b}$ et $\widetilde{c}$.

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Déterminer le rang de A.

Exercices complémentaires

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x, y, z)) = (y - z, z - x, x - y)$.
1. Trouver la matrice A de f dans la base canonique $b = (e_1, e_2, e_3)$.
2. On considère la famille $c = (c_1, c_2, c_3)$ avec $c_1 = e_1, c_2 = e_1 + e_2, c_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
Montrer que c est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice P de passage de la base b à la base c. Calculer, à l'aide de P et A, la matrice B de f dans la base c. Faire la vérification.

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 3.
On définit l'application $f : E \to E$ par $f(P) = (x^2 - 1)P'' + 2xP'$.
1. Vérifier que f est linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $b = (1, x, x^2, x^3)$.

2. Calculer le rang de f et trouver une base de $\ker f$, puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3.(a) Vérifier que pour tout $j = 0, \ldots, 3$, il existe un unique polynôme unitaire P_j de degré j et un unique réel λ_j tel que $f(P_j) = \lambda_j P_j$.
(b) Justifier que $c = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E et donner la matrice D de f dans cette base.
(c) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, D^n et en déduire A^n.

Exercice 8 1. Calculer le rang de $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique N, prouver que E est somme directe du noyau et de l'image de u.

Exercice 9 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1.(a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\ (u)$.
(b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. En déduire que la restriction v de u à son image :
$v : \mathrm{Im}\ (u) \to \mathrm{Im}(u)$, est une application bijective.
2. Soit p la projection linéaire sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$. Trouver la matrice Q de p dans la base canonique. En déduire que $u = \alpha p$, où α est un réel que l'on déterminera.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer u^n à l'aide de la question 2.
Faire la vérification en calculant par récurrence A^n.
4. Soit c_0 une base de $\mathrm{Ker}\ (u)$ et c_1 une base de $\mathrm{Im}\ (u)$. Justifier que $c = c_0 \cup c_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice M de u dans cette base.

Exercice 10

Calculer en fonction du paramètre m le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

Exercices d'entraînement

Exercice 11(*Extrait de l'examen de Juin 1999*)
On considère l'application $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, est $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ($m$ désigne un paramètre réel).
1. Déterminer Ker (f_m) et Im (f_m) en fonction du paramètre m. On donnera pour chacun de ces sous-espaces vectoriels une base. A-t-on $\mathbb{R}^3 =$ Ker $(f_m)+$ Im (f_m) ?
2. Soit $u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,0)$. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, et calculer P^{-1}.
3. On prend $m = -1$ et on pose $f = f_{-1}$.
(a) Soit $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(v) = v\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Donner une base de F.
(b) Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PB^nP^{-1}$.
(c) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 2$ et en déduire A^n.

Exercice 12(*Extrait de l'examen de Mai 1997*)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application de matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $f((x,y,z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $b_1 = (1,1,-2), b_2 = (1,1,-3), b_3 = (0,-1,2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer de deux manières différentes la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 13(*Extrait de l'examen de Mai 1998*)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application de matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(v) = 4v\}$. Montrer que
(a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
(b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Exprimer la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$.
(c) Calculer B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
(d) Exprimer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$, puis calculer P^{-1}.
En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = 1, z_0 = -1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,
$x_{n+1} = -2x_n, y_{n+1} = 3x_n + y_n + 3z_n, z_{n+1} = 3x_n + 3y_n + z_n$
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.