Liste d'exercices n° 1

Exercices fondamentaux

1. Compléter le tableau suivant :

Avec la valeur absolue	Sur la droite des réels	Inégalités	Intervalle
$\|x\| < 3$			
$\|x-3\| \leq 5$			
			[-5,3]
		$-3 < x < 7$	
$\|x+6\| \geq 2$			
			$]-1,7[$

2. Montrer que pour x et y des nombres réels, on a $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

3. On définit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des $x+iy$ avec x et $y \in \mathbb{R}$, muni des opérations habituelles, et on admet que c'est un corps. Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, on note $|z|^2 = x^2+y^2$.

1. Montrer que si $w = u+iv$ est un autre nombre complexe, alors :

$$\left(|z+w|^2 - |z|^2 - |w|^2\right)^2 \leq\ 4\,(xu+yv)^2 + 4\,(xv-yu)^2 = 4|z|^2|w|^2.$$

2. En admettant que tout nombre réel positif possède une racine carrée positive, montrer que $0 \leq a \leq b$ entraîne que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, et en déduire que les modules $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ de nombres complexes vérifient l'*inégalité de convexité* ou *inégalité triangulaire* : $|z+w| \leq |z|+|w|$.

4. À partir de l'axiome des segments emboîtés, démontrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que $\mathbb{R}$ possède la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$. (Indication : on procèdera par l'absurde dans le cas où $x < y$ en considérant la famille de segments $[0, y/(2^n).x]$ et on montrera qu'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $1 \notin [0, y/(2^n).x]$).

En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton, que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+$, si $x > 1$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n > y$.

5. Déterminer (s'ils existent) les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands ou plus petits éléments des ensembles, fonctions ou familles ci-dessous :

1. Les ensembles $A =]-1,2]$, $B =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]3,4[\cup \{7\}$ et $C = \mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $f(x) = 3x$ et $g(x) = 1-2x$ sur l'intervalle $I = [0,1]$, les fonctions f, g et $f+g$. Qu'observe-t-on ?
3. Les familles $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(2^{(-1)^n n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
- *(i)* $\forall a \in A, a \leq M$,
- *(ii)* $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$, avec $M - \epsilon < a$.

Si on suppose que A est minorée, donner une caractérisation analogue de $\inf A$.

7. Soient A et B deux ensembles de nombres réels positifs, et c un nombre réel positif. L'objectif est de comparer les bornes des ensembles $A+B = \{\, a+b \in \mathbb{R}\,;\, a \in A \text{ et } b \in B \,\}$ et $c\,A = \{\, c\,a \in \mathbb{R}\,;\, a \in A \,\}$ avec les bornes de A et de B.

1. Montrer que si $\sup A$ et $\sup B$ existent alors $\sup(A+B)$ et $\sup(cA)$ existent.

2. On suppose que $\sup A$ et $\sup B$ existent. En raisonnant par l'absurde et en utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\sup(cA) = c \sup A$.

8. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et J un ensemble d'indices.

1. Montrer qu'une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée, et qu'une famille $(x_j)_{j\in J}$ de nombres réels est bornée si et seulement si la famille $(|x_j|)_{j\in J}$ est majorée.
2. Soient maintenant $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes et $(z_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes. On dit par définition que la fonction f est *bornée* si la fonction réelle $|f|$ est majorée, et que la famille $(z_j)_{j\in J}$ est *bornée* si la famille réelle $(|z_j|)_{j\in J}$ est majorée. Montrer que les fonctions complexes bornées forment un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et que les familles complexes bornées forment un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
3. Montrer de plus que la fonction complexe f est bornée si et seulement si les deux fonctions réelles $\Re f$ et $\Im f$ sont bornées, et que la famille complexe $(z_j)_{j\in J}$ est bornée si et seulement si les deux familles réelles $(\Re z_j)_{j\in J}$ et $(\Im z_j)_{j\in J}$ sont bornées.

9. Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application. On dit que
- f est surjective si tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans X,
- f est injective si tout élément de Y est l'image d'au plus un élément de X, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution dans X,
- f est bijective si tout élément de Y est l'image d'exactement un élément de X, c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ a exactement une solution dans X ; autrement dit, f est à la fois surjective et injective.

Si Z est un troisième ensemble et $g : Y \to Z$ est une application, montrer que

1. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
2. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective
3. si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
4. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
5. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

10. Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application.

1. Si A et B sont des parties de X, montrer que
   (a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
2. Si A' et B' sont des parties de Y, montrer que
   (a) $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
   (b) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   (c) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

Exercices complémentaires

11. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{m,n} = 1/m + 1/n$, et on note $U = \{u_{m,n}; (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup U$ et $\inf U$.

12. Le but de l'exercice est de montrer que l'on ne peut pas munir $\mathbb{C}$ d'une relation d'ordre total compatible avec les deux opérations usuelles (addition et multiplication). En supposant qu'il existe sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre total compatible avec ces deux opérations, démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z \geq 0$ ou $z \leq 0$, puis en déduire que $z^2 \geq 0$ dans les deux cas. Montrer ensuite que $1 \geq 0$ et $-1 \geq 0$, et en déduire une contradiction. Conclure.

13. Le but de cet exercice est de montrer que tout intervalle $]a,b[$ non vide contient au moins un rationnel et au moins un irrationnel (on dit alors que les rationnels et les irrationnels sont *denses* dans $\mathbb{R}$). On admettra qu'il existe au moins un irrationnel que l'on notera x_0 (un tel irrationnel est implicitement fourni par exemple par l'exercice ci-dessous).

1. Premier cas : $a < 0 < b$. Montrer à l'aide de l'axiome des segments emboîtés que $]a, b[$ contient au moins un irrationnel de la forme $x = 2^{-n}x_0$ pour n assez grand.
2. Deuxième cas : $0 \leq a < b$. Montrer, toujours à l'aide des segments emboîtés, que $2^{-n} < b - a$ pour n assez grand, et que $2^{-p} < (1/b)$ pour p assez grand. En déduire que l'intervalle $]a, b[$ contient un rationnel $q = k2^{-n}$ pour un entier $k \leq 2^{n+p}$, puis qu'il contient aussi un irrationnel (considérer l'intervalle $]a - q, b - q[$).
3. Troisième cas : $a < b \leq 0$. Montrer comme dans le cas précédent que cet intervalle contient au moins un nombre rationnel et au moins un nombre irrationnel.

14. Le but de cet exercice est de montrer que les rationnels ne possèdent pas la propriété d'existence de l'axiome des segments emboîtés.

1. Montrer que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle (par des arguments arithmétiques, en cherchant la solution sous la forme $x = (p/q)$ et en discutant la parité de p et de q).
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$. On pose $a_1 = 1, b_1 = 2, m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, puis : $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$ si $m_n^2 < 2$; $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$ si $m_n^2 > 2$.
3. Montrer que a_n et b_n sont rationnels pour tout n, que le cas $m_n^2 = 2$ ne se produit pas, et que si x appartient à tous les segments $[a_n, b_n] \cap \mathbb{Q}$ alors $x^2 = 2$.

   Conclure (on pourra aussi en déduire qu'il existe un nombre réel $x \in [1, 2]$ vérifiant $x^2 = 2$, et que ce nombre est irrationnel).

15. On rappelle qu'il n'existe pas de nombre rationnel x vérifiant $x^2 = 2$ (voir exercice ci-dessus). Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ vérifie $x^2 < 2$, alors il existe un nombre *rationnel* $\varepsilon > 0$ tel que $(x + \varepsilon)^2 < 2$. En déduire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \,;\, x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

16. Montrer que pour tous réels a et $b, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et étudier le cas d'égalité. Déterminer (s'ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de l'ensemble $E = \{ab \in \mathbb{R} \,;\, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+ \text{ et } a^2 + b^2 = 6\}$.

Exercices d'entraînement

17. Soient A et B deux ensembles de nombres réels, et c un nombre réel. Comparer les bornes des ensembles $A + B = \{\, a + b \in \mathbb{R} \,;\, a \in A \text{ et } b \in B \,\}$ et $c\,A = \{\, c\,a \in \mathbb{R} \,;\, a \in A \,\}$ avec les bornes de A et de B.

18. Montrer que les rationnels possèdent la propriété d'unicité de l'axiome des segments emboîtés, c'est-à-dire montrer que si $([a_n, b_n] \cap \mathbb{Q})$ est une suite de segments emboîtés *de nombres rationnels* telle que chaque segment soit de longueur moitié de celle du précédent, alors il existe au plus un rationnel appartenant à tous ces segments (utiliser l'axiome des segments emboîtés dans $\mathbb{R}$).

19. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

- Donner sans calcul un majorant et un minorant évidents de f.
- En mettant $f(x)$ sous la forme $A\cos(x + \varphi)$, déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f.

20. Montrer que le théorème de la borne supérieure permet de faire la liste des intervalles donnée dans le préambule du cours. Plus précisément :

1. Si l'intervalle I est borné, notons $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Montrer que pour tout x vérifiant $a < x < b, I$ contient au moins un élément $> x$ et au moins un élément $< x$, et en déduire que $x \in I$.

   En discutant l'appartenance de a et de b à I, en déduire que I est l'un des intervalles $]a, b[,]a, b], [a, b[$ ou $[a, b]$.
2. Si l'intervalle I est majoré mais pas minoré, notons $b = \sup(I)$. Montrer que pour tout $x < b$ on a $x \in I$, et en déduire que $I =]-\infty, b[$ ou $I =]-\infty, b]$. Raisonner de même si I est minoré non majoré, et encore de même si I n'est ni majoré ni minoré.

21. Soient X, Y, Z trois ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que

1. Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective
2. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective
3. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective

22. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Établir que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) Pour toutes les parties A et B de $X, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. Montrer que pour toute partie A de $X, A \subset f^{-1}(f(A))$, puis établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) Pour toute partie A de $X, A = f^{-1}(f(A))$

23. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$u_{m,n} = \frac{m + 2n + 3}{m + n + 1}$$

et on appelle A l'ensemble $\{u_{m,n}; (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$.

1. Calculer $u_{0,0}, u_{1,0}, u_{0,1}, u_{m,0}$.
2. Prouver que 3 est un majorant de A.
3. Justifier que $\sup A = 3$.
4. Justifier que 1 est un minorant de A.
5. Trouver m de manière que $1 < u_{m,0} < 1.001$. Montrer que $1 = \inf A$.

Liste d'exercices n° 2

Exercices fondamentaux

Convergence de suites

1. *É*tudier la convergence des suites suivantes, et donner leurs limites éventuelles :

$$a)\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n};\ \ b)\ u_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n};\ \ c)\ u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}(\alpha>0);\ \ d)\ u_n = \frac{E[nx]}{n};e)\ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ .$$

2. *O*n dit qu'une suite complexe (z_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|z_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \in N$. Montrer que la suite (z_n) converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites $(Re(z_n))$ et $(Im(z_n))$convergent dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'une suite complexe convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

3. *L*es affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple :

1. " Si (u_n) est une suite telle que (u_n^2) converge. Alors la suite (u_n) converge"
2. " On suppose de plus que (u_n) est à termes positifs. Alors la suite (u_n) converge. "
3. " Soit (a_n) une suite bornée et (ε_n) une suite convergeant vers 0. Alors la suite de terme général $u_n = \varepsilon_n a_n$ converge vers 0."
4. " Si (u_n) converge, alors $u_{n+1} - u_n \to 0$? "
5. " Si $u_{n+1} - u_n \to 0$ alors (u_n) converge. "
6. " Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \to 0$ " (on rappelle que $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 0 telle qu'on puisse écrire $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$).
7. " Si $u_n - v_n \to 0$ alors $u_n \sim v_n$. "
8. " Si (u_n) et (v_n) convergent et si $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors (w_n) converge. "
9. " Si (u_n) est une suite de réels strictement positifs et tend vers zéro, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang."

4. *O*n définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 12,\ \text{et}\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\ v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}\ .$$

1. On pose $a_n = v_n - u_n$ et $b_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites géométriques convergentes, et donner leur limite.
2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et préciser leur limite.
3. Montrer directement que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire à l'aide de la première question ?

5. *règles de d'Alembert et de Cauchy pour les suites*

1. Soit (u_n) une suite de complexes non nuls telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l$, avec $0 \leq l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.
2. Soit (u_n) une suite de complexes non nuls telle que $|u_n|^{\frac{1}{n}} \to l$, avec $0 \leq l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.

3. Application : trouver les limites des suites de termes généraux $\dfrac{a^n}{n^p}, \dfrac{a^n}{n!}$.

6. *O*n considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée (on pourra procéder par récurrence).
2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone ; en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.
3. Montrer que
$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2},$$
puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \ .$$

Que peut-on en déduire ?

7. *S*oit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, k étant un réel vérifiant $0 \leq k < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Limites de fonctions

8. *É*tudier les limites en x_0 des fonctions suivantes :

$$a)x_0 = 0,\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}; \quad b)x_0 = +\infty,\ f(x) = x \ln\left(\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right) (\alpha, \beta \text{ réels donnés}) \ ;$$

$$c)x_0 = 4,\ f(x) = \frac{x-4}{x^2 - x - 12}; \quad d)x_0 = 0,\ f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$e)x_0 = +\infty,\ f(x) = x(\sqrt{1+x^2} - x); \quad f)x_0 = 1,\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3};$$

$$g)x_0 = -\infty,\ f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}; \quad h)x_0 = 1,\ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}.$$

9. *S*oient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(x)$ a une limite $l \in \mathbb{R}$ quand $x \rightarrow a^+$.

1. En utilisant le critère de Cauchy pour les fonctions, montrer que la fonction f a une limite quand $x \rightarrow a^+$.
2. En déduire que f admet un prolongement dérivable sur $[a, b]$.

10. *O*n rappelle la propriété suivante : soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{R}$: la fonction f a pour limite l quand $x \rightarrow a$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de limite a, la suite $(f(x_n))$ a pour limite l.

1. Déterminer les limites de $(1 + \dfrac{1}{n})^n$ et de $\sqrt[n]{n}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.
3. Soit χ_Q la fonction indicatrice de Q (i.e. χ_Q vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels). Montrer que χ_Q n'admet de limite en aucun point.

11. *S*oit $(\alpha \in \mathbb{R})$; on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^\alpha \sin x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

1. Trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n^\alpha$ et $f(y_n) = -y_n^\alpha$. En déduire que, pour $\alpha \geq 0$, f ne peut pas avoir de limite en $+\infty$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ lorsque $\alpha < 0$.

12. *É*tudier les limites à droite et à gauche en zéro des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{x}{|x|}; x \mapsto \frac{\sin x}{x + 2|x|}; x \mapsto \frac{\sin x}{\tan x}; x \mapsto \frac{\sin x}{x}; x \mapsto \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \ .$$

13. *O*n rappelle que, si x est un nombre réel, $E[x]$ désigne sa partie entière. Montrer que $\dfrac{x}{E[x]} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 1$.

Exercices complémentaires

14.

1. On considère une suite (a_n) qui converge vers 0. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > p$ on ait
$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k| \frac{3}{4}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k|.$$
En déduire que la suite (a_n) converge en moyenne vers 0, c'est-à-dire que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$.
2. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Démontrer que $S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to l$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si (u_n) est monotone, la convergence de (S_n) entraîne celle de (u_n).
4. Application : Soit (x_n) une suite telle que $x_{n+1} - x_n \to l \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $x_n \sim ln$.
5. Application : Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in \mathbb{R}$. Alors $u_n{}^{\frac{1}{n}} \to l$.

15. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \to_{x\to+\infty} l \in \mathbb{R}$. On veut montrer que : $\frac{f(x)}{x} \to_{x\to+\infty} l$.
Pour cela, on suit la méthode suivante : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

1. Trouver $a > 0$ tel que $\forall x > a$: $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que :
$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)}{x} - \frac{a}{x}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ .$$
En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que pour $x > a$, on ait $|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \leq \frac{K}{x}$.
3. Conclure.

16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on écrit $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n dans $\mathbb{N}^*$, puis $u_n = \frac{a_n}{b_n}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante minorée.
2. Prouver que
$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{b_n 5^n} \ .$$
En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

17. On considère la suite (u_n) définie par récurrence par
$$u_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } u_{n+1} = \sin u_n \ .$$

1. Démontrer que (u_n) est décroissante et convergente. Quelle est sa limite ?
2. Soit $p \in \mathbb{Z}^*$; donner un développement limité de $\sin^p x/x^p$ à l'ordre 4.
3. En choisissant $p = -2$ en déduire que
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(x^2) \ ; (x \to 0) \ .$$
4. À l'aide de l'exercice 1 en déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

18. Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers l si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l.Trouver une suite non bornée telle que (u_{2n}) converge.

2. On suppose que les trois suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

19. On suppose $0 < u_0 < v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n\, v_n = u_0\, v_0, \quad \text{et } v_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1}).$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq v_n$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante ; en déduire que ces deux suites convergent.
3. Démontrer que

$$v_n - u_n < v_{n-1} - u_{n-1}.$$

En déduire que $\lim v_n - u_n = 0$ puis que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune que l'on déterminera. Cas particulier : $u_0 = 1, v_0 = p \in \mathbb{N}^*$.

20. On considère deux suites (a_n) et (b_n) de limites respectives a et b, et on définit la suite (c_n) par

$$c_n = \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1)\ .$$

Démontrer qu'il existe un réel M tel que

$$|c_n - ab| \frac{3}{4} \frac{M}{n} (\sum_{k=1}^{n} (|a - a_k| + |b - b_k|)\ .$$

En déduire que $c_n \to ab$.

Exercices d'entraînement

21. On considère la fonction g définie par $g(x) = e^x(x^2 + 1)$.

1. Montrer qu'on peut écrire sa dérivée n-ième sous la forme

$$g^{(n)}(x) = e^x(x^2 + u_n x + v_n)\ .$$

2. Démontrer que $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = v_n + 2n$. En déduire u_n et v_n en fonction de n, puis l'expression de $g^{(n)}(x)$.

22. Étudier la suite (u_n) définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \ln(1 + u_n)\ .$$

23. Étudier la suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = u_n^2$.

24. On considère la suite (u_n) définie par récurrence par

$$u_0 = a, v_0 = b, 0 < a < b \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}\ .$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

2. Calculer u_n et v_n explicitement en posant $a = b\cos\alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{\frac{1}{4}}{2}$.

3. En déduire que

$$\lim u_n = b\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ .$$

4. En choisissant $a = 1, b = 2$, déterminer une valeur approchée de $\frac{1}{4}$.

25. Soient a, b deux réels tels que $0 < a\frac{3}{4}b$ et (x_n) la suite définie par récurrence par $a\frac{3}{4}x_0\frac{3}{4}x_1\frac{3}{4}b$ et $x_{n+2} = \sqrt{x_n x_{n+1}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a\frac{3}{4}x_n\frac{3}{4}b$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|x_{n+1} - x_n|\frac{3}{4}k|x_n - x_{n-1}|, \text{ avec } k = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}} \, .$$

3. En déduire que (x_n) converge.

Université de Nantes **Département de Mathématiques**
DEUG MIAS - Module M2 Analyse **Année 2002/2003**

Liste d'exercices n° 3

Continuité

Exercices fondamentaux

1.

1. Les expressions a)b)c)d) de l'exercice 9 de la liste 2 définissent-elles des fonctions continues sur leur domaine de définition ?
   Peuvent-elles se prolonger par continuité au point x_0 (lorsque x_0 est fini) ?
2. Même question avec la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$ et $x_0 = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. Représenter graphiquement f puis étudier sa continuité.

3. Soit k un réel de l'intervalle $]0,1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R} \quad |\ f(x) - f(y)\ | \leq k\ |\ x - y\ |$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$. En utilisant l'exercice 8 de la liste 2, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Montrer que $f(l) = l$ et que l est l'unique point fixe de f.
3. Montrer que ces résultats s'appliquent si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si f' vérifie :
   $\exists k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ |\ f'(x)\ | \leq k$.
4. Appliquer cette méthode à la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et avec $u_0 = 0$.
   Comparer avec l'exercice 6 de la liste 2.

4. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements, que,
pour $x > 0$, $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.

Intégration

5. Soit $a < b$ et f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, et telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer que $f = 0$.
Indication : on pourra utiliser la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ définie sur $[a,b]$.

6. Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soient $a < b$ et f et g deux applications continues : $[a,b] \to \mathbb{R}$.

1.
2. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geq 0$.
3. En déduire que $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)$ et que
   $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 = \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda g = 0$.
4. On suppose que f ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que $(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$.
   Pour quelles fonctions y a-t-il égalité ?

7. Soit I_n l'intégrale $\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^3+x^3}}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
Indication : On utilisera un encadrement de I_n.

8. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soient f et g deux fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a,b]$. On suppose que la fonction g garde un signe constant sur $[a,b]$.
À l'aide de la fonction $F(x) = f(x)\int_a^b g(t)dt$, montrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que :
$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$. (Cette égalité est appelée première formule de la moyenne).
Indication : distinguer les cas où $g(t) \geq 0$ et $g(t) < 0$ pour tout t de $[a,b]$ pour obtenir un encadrement de $\int_a^b f(t)g(t)dt$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction F.
Étudier le cas où g est la fonction constante égale à 1.

9. Calculer les intégrales suivantes : $\int_a^x \mathrm{Argch}t dt$, $\int_a^x \ln(t+\frac{1}{t})dt$ pour $a, x \in]0,+\infty[$.

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ pour tout réel a.

11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période T. Montrer que l'intégrale $\int_a^{a+T} f(x)dx$ ne dépend pas du réel a.

Exercices complémentaires

12. Les expressions suivantes définissent-elles des fonctions continues sur leur domaine de définition ? Peuvent-elles se prolonger par continuité ?
$f_1 : x \mapsto \frac{x}{|x|}$, $f_2 : x \mapsto \frac{\sin x}{2+2|x|}$, $f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

13. Étudier la continuité sur $]-\pi,+\pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x\sin x}{1-\cos x}$.
Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

14. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si $f(x) = g(x)$ pour tout rationnel x de $\mathbb{Q}$, montrer que $f = g$, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}$.
   Indication : on utilisera que tout réel est limite d'une suite de rationnels.
2. Si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x,y) de nombres réels(on dit que f est additive) et si g désigne l'homothétie de rapport $f(1)$(i.e. $g(x) = f(1)x$ pour tout réel x), montrer que $f = g$.
3. Si f est additive et également multiplicative ($f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout couple (x,y) de réels), montrer que f est soit la fonction nulle, soit la fonction identité.

15. Soit f une fonction continue, montrer que, si f est paire, alors
$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ pour tout réel a positif.

16. *Intégrales de Wallis*
Pour $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Pour $n \geq 2$, montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (Indication : on pourra écrire $(\sin x)^n = (\sin x)^{n-1}\sin x$ et utiliser une intégration par parties).
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}, pour $p \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que, pour $n \geq 1, I_{n-1} \geq I_n > 0$ et que $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$.
4. En déduire la convergence et la limite de la suite : $u_p = \left(\frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6....(2p)}\right)^2 (2p+1)$.
5. Montrer que $\forall p \geq 0, I_{2p+1}^2 \leq \frac{\pi}{2(2p+1)}$.
6. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercices d'entraînement

17. Soit f une fonction réelle, définie et continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans ce même segment $[0,1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(x) - f(x')| \geq |x - x'|$ pour tout couple (x,x') d'éléments de $[0,1]$.

1. Soit x un élément de $[0,1]$; démontrer que la suite de nombres réels définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ est une suite convergente de limite notée l.(Indication : on montrera que $f(t) \geq t$ pour tout $t \in [0,1]$ pour montrer que la suite (x_n) est croissante.)
2. Démontrer que $f(l) = l$. (On peut compléter cette étude en montrant par l'absurde que $f(x) = x$ pour tout élément x de $[0,1]$).

18. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[a,b]$ et telle que la fonction dérivée f' soit continue sur $[a,b]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)dx$ et $J_n = \int_a^b f(x)\cos(nx)dx$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
Indication : on utilisera une intégration par parties pour I_n et J_n.

19. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $2p \in \mathbb{N}$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,\frac{1}{2}}$.
2. Établir une relation de récurrence entre $I_{n,\frac{1}{2}}$ et $I_{n+1,\frac{1}{2}}$ et en déduire $I_{n,\frac{1}{2}}$.
3. Établir une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$ et en déduire $I_{n,p}$.
4. En déduire une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k \frac{1}{n+k+1}$ lorsque $p \in \mathbb{N}$.

Liste d'exercices n° 4
Intégrales généralisées et séries numériques

Exercices fondamentaux

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$
9. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx.$

On pourra utiliser une intégration par partie pour le (8).

2. *Règle de Riemann* Soit f une fonction continue positive définie sur $[a,+\infty[$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(x) \leq \dfrac{M}{x^\alpha}$ pour $x \geq A$. En déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in]-\infty,1]$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $l \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $l = +\infty$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(x) \geq \dfrac{M}{x^\alpha}$ pour $x \geq A$. En déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.
3. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

3. *Séries géométriques* Calculer la somme partielle $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ de la série géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. En déduire que cette série est convergente si et seulement si $|r| < 1$ et donner sa somme dans ce cas.

4. *Séries de Riemann*

1. On note $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad |H_{2k} - H_k| \geq \frac{1}{2}.$$

Rappeler le critère de Cauchy de convergence des suites dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la série harmonique est divergente.

2. Pour $\alpha \leq 1$, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
3. Pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt.$$
En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

5. *Règle de Riemann* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \leq \dfrac{M}{n^\alpha}$ pour $n \geq N$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $l \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $l = +\infty$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \geq \dfrac{M}{n^\alpha}$ pour $n \geq N$. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
3. Étudier la nature des séries de terme général suivant :

(a) $u_n = \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^n}$ (b) $u_n = \dfrac{n}{a^n}$, pour $a > 0$ (c) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercices complémentaires

6.

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$.
2. Appliquez le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{a} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$ et en déduire la valeur de I.

7. *Intégrales de Bertrand* Discuter selon les valeurs de α et β la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\, dx$. (On utilisera le changement de variable $t = \ln x$).

8. *Comparaison d'une série et d'une intégrale* Soit f une fonction positive continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.
Application : discuter selon les valeurs de α et β la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $n \geq 2$.

9. *Règle de d'Alembert* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+.$$
   (a) Si $l < 1$, construire des constantes $c > 0$, $\lambda < 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq c\lambda^n$ pour tout $n \geq k$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
   (b) Si $l > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.
   (c) Que penser de ce critère de convergence si $l = 1$ (considérer les séries $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$).
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{n!}{n^n}$?

10. *Séries alternées*

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On note $S_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n u_n$. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente.

2. Déterminer la nature de la série de terme général :

(a) $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $(-1)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)$

(c) $(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(d) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(e) $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

11. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que, si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercices d'entraînement

12. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^5}\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \sin(\frac{1}{x})\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx.$

13.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} x}\,dx$ converge et la calculer.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ convergent et les calculer.

14.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (a) Trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. Même question avec la suite (u_n) donnée par $u_n = \ln(1 - \dfrac{1}{n^2})$, $n \geq 2$.

15. Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

2. $\dfrac{1}{n^{\ln n}}$

3. $\dfrac{1}{(\ln n)^2}$

4. $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

5. $\dfrac{3^n}{n!}$

6. $\left(\dfrac{n+3}{2n+4}\right)^n$

7. $\dfrac{n^5}{2^{n^2}}$

8. $\dfrac{n^n}{2^{n^2}}$

9. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.