

Unité de Mathématiques M2
Contrôle continu du 15 Mars 2003 - Durée 2 heures

Documents et calculatrices interdits.

*Il sera tenu compte de la présentation ainsi que de la rédaction.
Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin.*

Exercice 1

1. Soit $u = (1, -1, -1)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (1, 1, -3)$ trois vecteurs de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 .
 - (a) La famille (u, v, w) est-elle libre ?
 - (b) Soit F le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par (u, v, w) . Quelle est la dimension de F ?
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$.
 - (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Quelle est la dimension de G ?
3. Montrer que $F = G$.

Exercice 2

On note :

$$\mathbb{R}_2[X] = \{a + bX + cX^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$f(a + bX + cX^2) = a + cX + aX^2$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base et la dimension du noyau $\text{Ker}(f)$ de f .
3. Donner une base et la dimension de l'image $\text{Im}(f)$ de f .
4. A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$?

T.S.V.P.

Exercice 3

Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) = e^{-\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}$$

On note :

$$A = \{g(x), x \in [0, +\infty[\}$$

1. Montrer que A est une partie bornée de \mathbb{R} .
2. Établir le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$. Préciser les limites de g aux bornes de l'intervalle.
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de la partie A .
4. Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément et le plus petit élément de la partie A .
5. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = g(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer, s'ils existent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad , \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \{u_n\} \quad , \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} \{u_n\}$$