Université de Nantes
Département de Mathématiques

DEUG MIAS - M2
Année 2002/2003

Devoir n°1.

A rendre dans la semaine du 10/02.
Chaque question doit être justifiée de façon précise et rigoureuse !
La rédaction est prise en compte dans la note finale.

Analyse

Exercice 1. On admet que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel et on note $\mathbb{K} := \{p + q\sqrt{2} : (p,q) \in \mathbb{Q}^2\}$. On munit $\mathbb{K}$ des opérations d'addition et de multiplication induites par celles de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour ces opérations, $\mathbb{K}$ est stable, c'est-à-dire $\forall\, x, y \in \mathbb{K}$, on a : $x + y \in \mathbb{K}$ et $x.y \in \mathbb{K}$.

2) En vérifiant chaque axiome de la définition, montrer que, muni de ces opérations, $\mathbb{K}$ est un corps.

indications : On rappelle que $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif et que la somme ou le produit d'un nombre rationnel (non nul) avec un nombre irrationnel donne toujours un nombre irrationnel.
Pour déterminer l'inverse de $p + q\sqrt{2}$ pour la multiplication, on étudiera séparément les cas $p \neq 0$ et $q = 0$ puis $p = 0$ et $q \neq 0$ et enfin le cas $p \neq 0$ et $q \neq 0$. Dans la dernière situation, calculer $\dfrac{1}{p + q\sqrt{2}}$ en utilisant un produit remarquable.

Exercice 2. Soit D la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$D := \left\{ \frac{3n-1}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ \sin \frac{x\pi}{3} : x \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Déterminer dans $\mathbb{R}$, s'ils existent, $\sup D$, $\inf D$, $\max D$ et $\min D$.
indication : On mettra D sous la forme $P \bigcup Q$ et on étudiera les majorants et minorants de P, respectivement de Q. En comparant les résultats trouvés pour P et Q, on conclura sur D.

Algèbre

Exercice 3. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et soit $B = (b_1, b_2, b_3)$ la famille définie par : $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (0,1,0)$, et $b_3 = (0,0,1)$. On note $F = \{(x,y,z) \in E / x - y + 2z = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) On note $u_1 = b_1 + b_2$ et $u_2 = 2b_2 + b_3$. Montrer que u_1 et u_2 appartiennent à F, que la famille $U = (u_1, u_2)$ est libre et que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. En déduire la dimension de F.

3) Soit $v_0 \in E$, le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$. Montrer que la famille (u_1, u_2, v_0) est une base de E. En déduire que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(v_0)$.

4) Dans le cas général, démontrer que $\forall\, v \in E \backslash F$, on a toujours $E = F \oplus \mathrm{Vect}(v)$.