Examen du 16 mai 2002

Durée : 3 heures

Sont autorisées les notes de cours limitées à une feuille recto-verso, les calculettes ne sont pas autorisées.

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

Le sujet comprend un recto-verso.

Problème d'analyse

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit deux suites réelles (a_n) et (b_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \int_0^{2\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt\,.$$

(**1**) (a) Énoncer le résultat du cours qui permet d'affirmer que la fonction f est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$.

(b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont bornées.

(**2**) On suppose maintenant que la fonction f est de classe C^1.

(a) Montrer que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.
On pourra penser à une intégration par partie.

(b) Montrer que si de plus $f(2\pi) = f(0)$ alors la suite (b_n) est convergente, et calculer sa limite.

(**3**) On suppose maintenant que la fonction f est de classe C^2, et qu'elle est 2π-périodique, ce qui signifie que $f(t + 2\pi) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que la dérivée f' est aussi 2π-périodique.

(b) On pose $c_n = n\,a_n$ et $d_n = n\,b_n$. Étudier la convergence des suites (c_n) et (d_n).

Exercice d'algèbre

Les matrices A et B suivantes sont elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

On justifiera les réponses, mais on ne cherchera pas à calculer de matrice inverse.

Problème d'algèbre

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions F définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles de la forme

$$F(x,y) = a + bx + cy + dxy\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

où a, b, c, d sont des coefficients réels.

(**1**) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles.

(**2**) Soient e, f, g, h les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ suivant

$$e(x,y) = 1\,, \quad f(x,y) = x\,, \quad g(x,y) = y\,, \quad h(x,y) = xy\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Montrer que la famille $\mathbf{B} = (e, f, g, h)$ est une famille libre de $\mathcal{E}$. En déduire que $\mathbf{B}$ est une base de $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

(**3**) À la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, on associe la fonction G définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$G(x,y) = F(x+1, y+1) - F(x,y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Montrer que si F est dans $\mathcal{E}$, alors G est dans $\mathcal{E}$.

(b) Montrer que l'application D définie sur $\mathcal{E}$ par

$$D(F) = G\,, \quad F \in \mathcal{E}$$

définit un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

(c) Donner la matrice M représentant l'endomorphisme D relativement à la base $\mathbf{B}$.

(d) Quelle est la dimension du noyau $\operatorname{Ker} D$? Quelle est la dimension de l'image $\operatorname{Im} D$?

(e) Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que $D^k = 0, k \geq k_0$.

(f) Montrer que $L = Id_{\mathcal{E}} + D$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$. Chercher la solution F de $L(F) = h$.