Examen du 23 juin 2003

Durée : 3 heures

Sont autorisées les notes de cours limitées à une feuille recto-verso, les calculettes ne sont pas autorisées.

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

Le sujet comprend un recto-verso.

Problème d'analyse

Soit, pour α réel positif non nul, l'intégrale généralisée

$$I(\alpha) = \int_0^{(+\infty)} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}\,.$$

(**1**) Montrer que l'intégrale généralisée $I(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$. *On pourra comparer* $(1+x^2)^{-\alpha}$ *à* $x^{-2\alpha}$ *pour* $x \in [1, +\infty)$.

Pour n entier au moins égal à 1, on note A_n et B_n les réels définis par

$$A_n = I(n)\,, \quad B_n = I(n+1/2)\,.$$

(**2**) (a) Montrer que

$$\int_0^t \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{\alpha+1}} = -\frac{1}{2\alpha}\frac{t}{(1+t^2)^\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}\,, \quad t \geq 0\,.$$

(b) En déduire $I(\alpha) - I(\alpha+1) = \dfrac{I(\alpha)}{2\alpha}$ pour $\alpha > 1/2$.

(c) Montrer que $2nA_{n+1} = (2n-1)A_n\,, \quad n \geq 1\,.$

(**3**) (a) Soit a_n défini par $a_n = A_{n+1}/A_n, n \geq 1$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

(b) Ordonner par ordre croissant A_n, A_{n+1} et B_n. En déduire que, si $q_n = B_n/A_n, n \geq 1$, la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ converge. Quelle est sa limite ?

(c) Montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est convergente, de limite ℓ (qu'on ne cherchera pas à calculer ici).

(d) Montrer que, si $p_n = (2n-1)A_nB_n, n \geq 1$, la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est constante.

(e) Déduire de la question précédente que la suite $(\sqrt{n}A_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Conclure en donnant la valeur de la limite ℓ de la question (**3**) (c).

Problème d'algèbre

Soient $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ deux paramètres. On note E l'ensemble de toutes les suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation

$$u_{n+2} = 2\,r\,(\cos t)\,u_{n+1} - r^2\,u_n \qquad \text{pour tout } n \geq 0\,.$$

(**1**) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

(**2**) On note (v_n) et (w_n) les éléments de E qui vérifient : $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.

(a) Soit (u_n) un élément de E. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0\,v_n + u_1\,w_n$.

(b) Montrer que l'espace E est de dimension finie et calculer sa dimension.

(**3**) On note z un nombre complexe, et $x_n = \Re e(z^n)$ et $y_n = \Im m(z^n)$.

(a) On suppose que $z^2 = 2\,r\,(\cos t)\,z - r^2$. Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) appartiennent à E.

(b) Réciproquement, on suppose que les suites (x_n) et (y_n) appartiennent à E. Démontrer que l'on a $z^2 = 2\,r\,(\cos t)\,z - r^2$.

(**4**) On suppose que $t \notin \{\,k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}\}$, et on pose $x_n = r^n\,\cos(nt)$ et $y_n = r^n\,\sin(nt)$.

(a) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) appartiennent à E.

(b) Soit (u_n) un élément de E. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = r^n\,\big(a\,\cos(nt) + b\,\sin(nt)\big)$.