UNIVERSITÉ DE NANTES

École polytechnique
ÉTN-3 Algèbre (accueil)
Année 2008-2009

Contrôle (une heure et trente minutes)

12 novembre 2008

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Les réponses seront soigneusement justifiées.

I

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(**1**) Calculer la matrice de F relativement à la base canonique

$$\mathcal{C} = (c_1 = (1, 0, 0), c_2 = (0, 1, 0), c_3 = (0, 0, 1))$$

de $\mathbb{R}^3$.

(**2**) Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la famille de vecteurs définis par

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (1, 1, 0), \quad e_3 = (1, 1, 1).$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Exprimer les vecteurs c_1, c_2 et c_3 comme combinaisons linéaires des vecteurs e_1, e_2 et e_3.
En déduire la représentation matricielle de F relativement à la base $\mathcal{E}$.

(**3**) Montrer que le noyau de F est de dimension 1 : en donner une base.

II

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AA^t.
En déduire que A est inversible et donner son inverse.

III

Soit M la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(**1**) Quel est le polynôme caractéristique de M ?

(**2**) Quelles sont les valeurs propres de M ?

(**3**) Donner une base de $\mathbb{R}^2$ qui soit constituée de vecteurs propres de M.

(**4**) Donner une matrice P telle que la matrice $D = P^{-1}MP$ soit diagonale.
Que vaut D ?