

- 1 Le modèle de Goodwin
- 2 Isoclines
- 3 Lotka-Volterra et ses perturbations

2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note u et v respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit $\sigma = \frac{k}{Q}$ est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant α
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

$$(1) \dot{v} = \dot{Q} - \alpha = \frac{(1-u)Q}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels, w , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

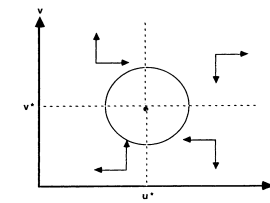
$$\dot{w} = -\gamma + \rho v$$

D'où :

$$(2) \dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + \rho v$$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$



Le modèle de Goodwin II

2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note u et v respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit $\sigma = \frac{k}{Q}$ est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant α
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

$$(1) \dot{v} = \dot{Q} - \alpha = \frac{(1-u)Q}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels, w , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

$$\dot{w} = -\gamma + \rho v$$

D'où :

$$(2) \dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + \rho v$$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$

Le modèle de Goodwin III

$$\dot{v} = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha, \quad \dot{u} = -(\gamma + \alpha + \rho v)$$

Attention ici, \dot{u} est la dérivée logarithmique de u : $\dot{u} == u'/u$!!!!
Ainsi, pour des constantes A, B, u^*, v^* convenables,

$$\frac{v'}{v} = B(u^* - u), \quad \frac{u'}{u} = A(v - v^*)$$

ou encore

$$v' = Bv(u^* - u), \quad u' = Au(v - v^*)$$

avec deux PÉ $(v^*, u^*), (0, 0)$ de matrices linéarisées respectives

$$\begin{pmatrix} 0 & -Bv^* \\ Au^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Bu^* & 0 \\ 0 & -Av^* \end{pmatrix},$$

le premier étant un centre (intérieur au premier quadrant seul domaine d'intérêt), le second un point selle (non stable) : l'extinction simultanée des deux populations n'est guère envisageable)

L'équation différentielle impliquant $v'(u)$

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{B(u^* - u)u}{A(v - v^*)v}$$

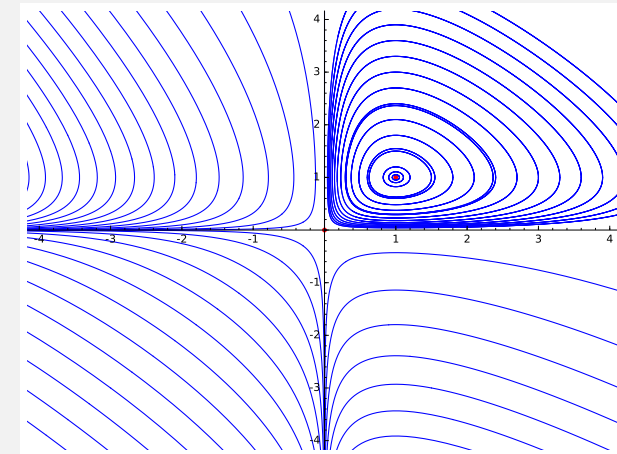
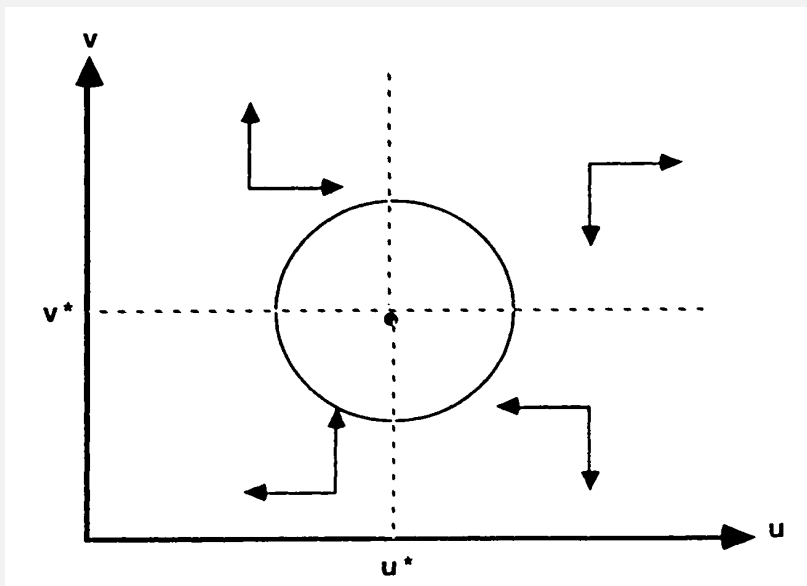
est à variables séparables

$$\frac{A(v - v^*)}{v} dv = \frac{B(u^* - u)}{u} du$$

donnant une intégrale première

$$Av - Av^* \log v - Bu^* \log u + Bu$$

Le modèle de Goodwin IV



$$v' = Bv(u^* - u), \quad u' = Au(v - v^*)$$

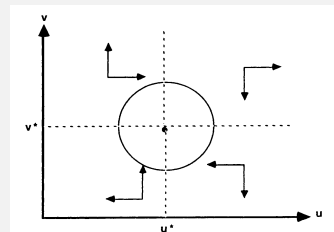
C'est le modèle proie/prédateur de Lotka-Volterra : une population v fleurit si elle n'est pas agressée ; une autre population u décline si elle est isolée, sans proie assurant sa subsistance. Si ces deux populations coexistent, les termes uv décrivent l'interaction entre les deux populations.

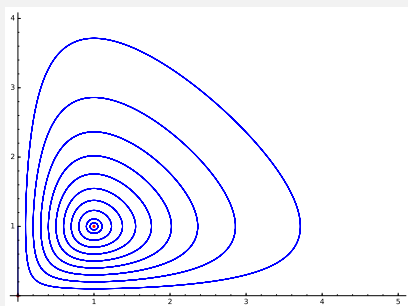
Isoclines

Soit $X \rightarrow f(X)$ un champ de vecteurs sur un ouvert du plan. Une *isocline de pente α* pour le champ f est une courbe où le champ V a une pente α .

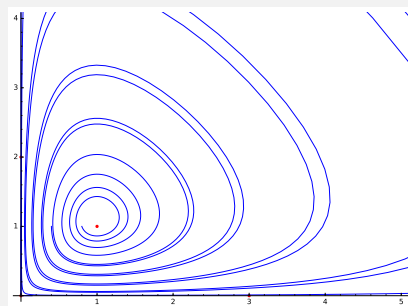
Si $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, l'isocline verticale (*resp.* horizontale) a pour équation $P(x, y) = 0$ (*resp.* $Q(x, y) = 0$).

Si un domaine Ω est délimité par des isoclines, P et Q sont de signe constant sur Ω et la direction du champ de vecteurs peut être esquissée par des flèches ou une combinaison de flèches vers un des points cardinaux suivant le signe de P et Q . Complément de l'analyse des points d'équilibre, l'étude des isoclines fait partie de l'analyse qualitative des solutions d'une ÉD.

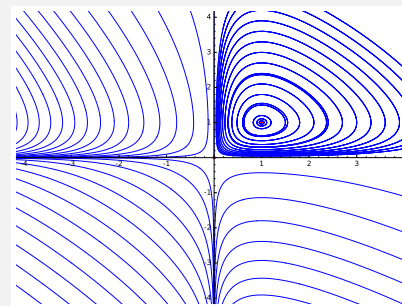




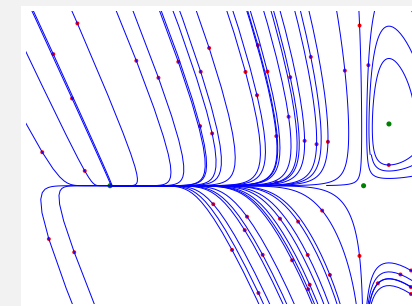
$(x(1 - y), y(x - 1))$



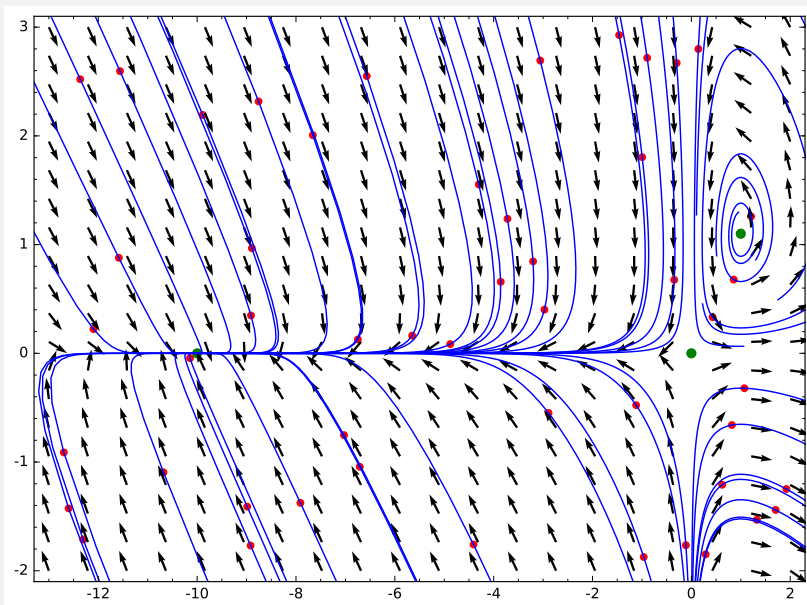
$(x(1 - y + x/10), y(x - 1))$



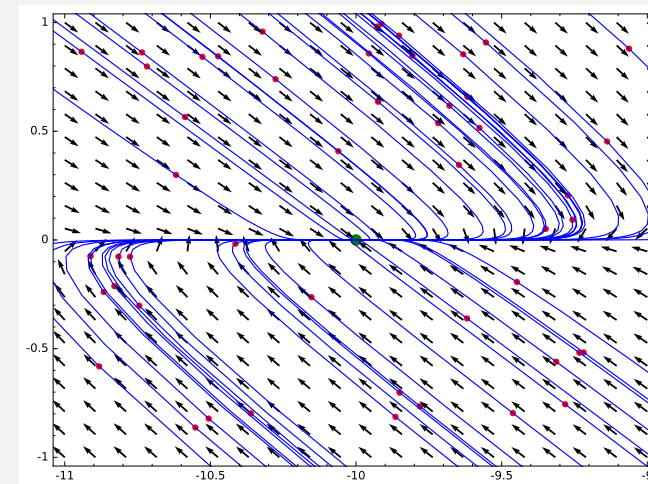
$(x(1 - y), y(x - 1))$
 $(0, 0), (1, 1)$



$(x(1 - y + x/10), y(x - 1))$
 $(0, 0), (1, 11/10), (-10, 0)$



$(x(1 - y + x/10), y(x - 1))$
 $(0, 0), (1, 11/10), (-10, 0)$



$$\begin{pmatrix} x(1 - y + x/10), y(x - 1) \\ 1 - y + x/5 & -x \\ y & x - 1 \end{pmatrix}_{|(-10,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Avec ces deux valeurs propres réelles strictement négatives, du linéarisé $Df(-10, 0)$, le PÉ $(-10, 0)$ est asymptotiquement stable.

Cherchons une fonction de Liapounov indiquant la stabilité asymptotique du PÉ $(-10,0)$. Après le changement de variable $(x, y) \rightarrow (u = x + 10, y)$, le champ prend la forme

$$V(u, y) = ((-10 + u)(-y + u/10), y(u - 11))$$

Pour $L_a(u, y) = (u^2 + ay^2)/2$, on a

$$\begin{aligned} \dot{L}_a(u, y) &= \langle \nabla L_a, V \rangle(u, y) \\ &= [u](-10 + u)(-y + u/10) + [ay]y(u - 11) \\ &= u(10y - u - uy + u^2/10) + ay^2(u - 11) \\ &= -u^2 + 10yu - 11ay^2 - u(uy - u^2/10 - ay^2) \\ &= -u^2 + 10yu - 11ay^2 + r(u, y) \end{aligned}$$

où le reste $r(u, y)$ est un $o(\|(u, y)\|_2^2)$.

Fin

$$\dot{L}_a(u, y) = -u^2 + 10yu - 11ay^2 + r(u, y)$$

La forme quadratique

$$(u, y) \mapsto Q_a(u, y) = -u^2 + 10yu - 11ay^2$$

est définie négative si $11a - 25 > 0$. Choisissons un tel a et soit $C_a > 0$ tel que $Q_a(u, y) < -C_a\|(u, y)\|_2^2$. Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < C_a/2$ et V_ε un voisinage de $(0, 0)$ tel que le reste r y vérifie

$$|r(u, y)| < \varepsilon\|(u, y)\|_2^2.$$

Alors sur V_ε , on a

$$\dot{L}_a = Q_a(u, y) + r(u, y) \leq -C_a\|(u, y)\|_2^2 + \varepsilon\|(u, y)\|_2^2 \leq -C_a/2\|(u, y)\|_2^2$$

ce qui assure que la fonction L_a est de Liapounov stricte sur V_ε . Aussi, le PÉ $(x = -10, y = 0)$ est asymptotiquement stable.