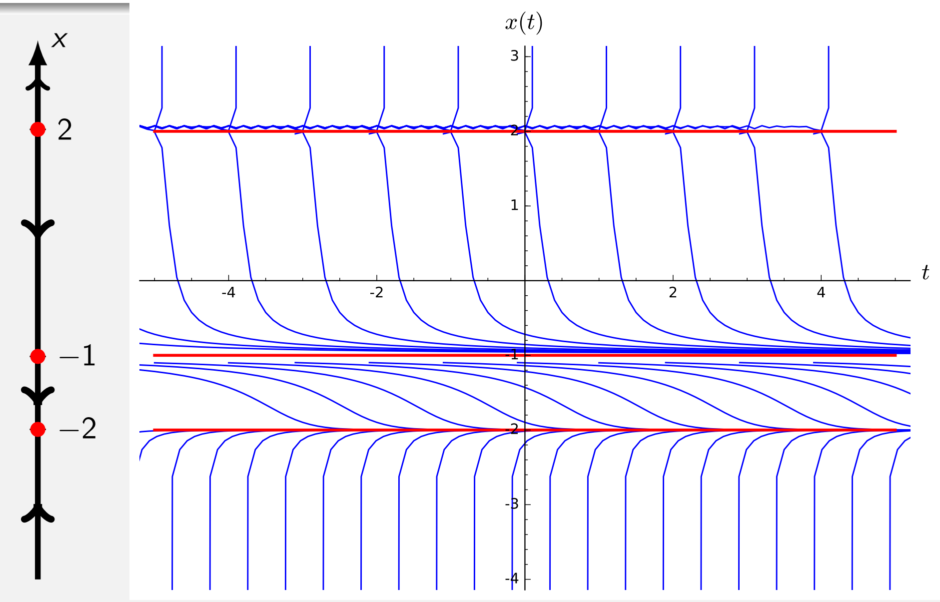
Soit x_e un point d'équilibre de l'ÉD scalaire $x' = F(x)$. Si $F'(x_e) < 0$, alors le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable.

$$x' = -x(x-a)^2$$

$$\frac{\ln(x(t)-a) + \ln(x(t)) + a(x(t)-a)^{-1}}{a^2} = C - t$$

$$x' = (x^2-4)(x+1)^2$$



Portrait de phase pour $x' = (x^2-4)(x+1)^2$: $x = -2$ est le seul point d'équilibre asymptotiquement stable.

Stabilité d'un point d'équilibre

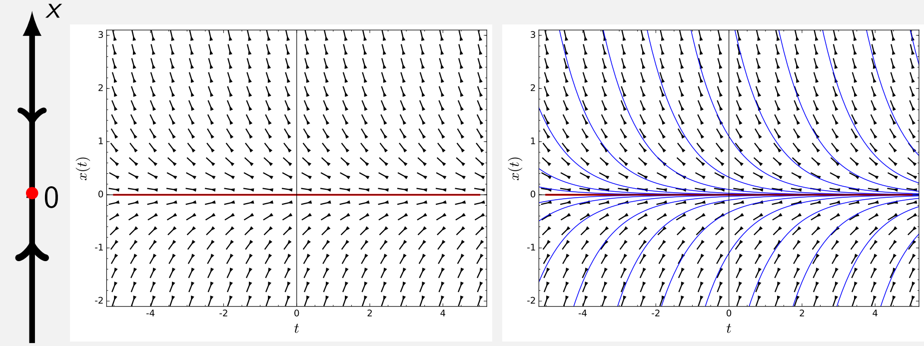
Soit x_e point d'équilibre de l'ÉD $x' = f(x)$.

Le point d'équilibre x_e est *stable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x_0 dans la boule $B(x_e, \eta)$, le problème de Cauchy de condition initiale $x(t_0) = x_0$ a une solution définie sur $[t_0, +\infty)$ et la trajectoire $x(t_0 + \mathbb{R}^+)$ reste dans la boule $B(x_e, \varepsilon)$.

Le point d'équilibre x_e est *asymptotiquement stable* si x_e est stable et s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x_0 dans la boule $B(x_e, \eta)$ la solution du problème de Cauchy de condition initiale $x(t_0) = x_0$ converge vers x_e.

L'*ensemble de stabilité* (ou *bassin d'attraction*) $S(x_e)$ du point d'équilibre x_e est la partie des $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que la solution du problème de Cauchy partant de x_0 converge vers x_e.

$$x' = -x, \quad \mathcal{E} = \{0_s\}$$



$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-(t-t_0)}$$

$$S(0_s) = \mathbb{R}$$

Soit p un polynôme du second degré.

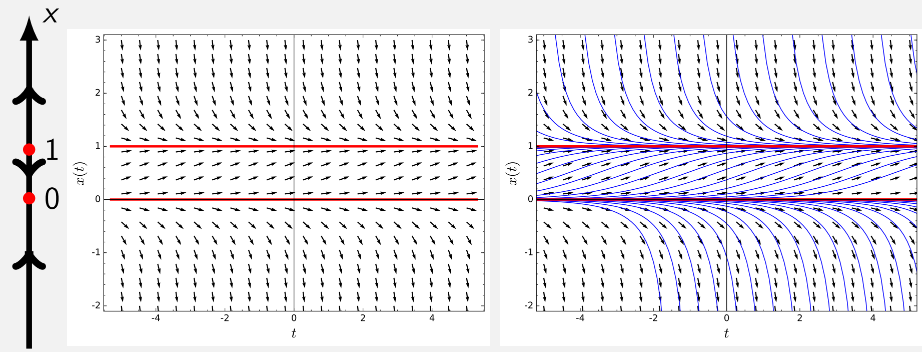
En considérant le changement de fonction $y(t) = ax(kt) + b$, l'équation différentielle

$$x' = p(x)$$

peut être transformée en l'un des trois types suivants

$$x' = x(x-1), \qquad x' = -x^2, \qquad x' = 1 + x^2.$$

$$x' = x(x-1), \quad \mathcal{E} = \{0_s, 1\}$$

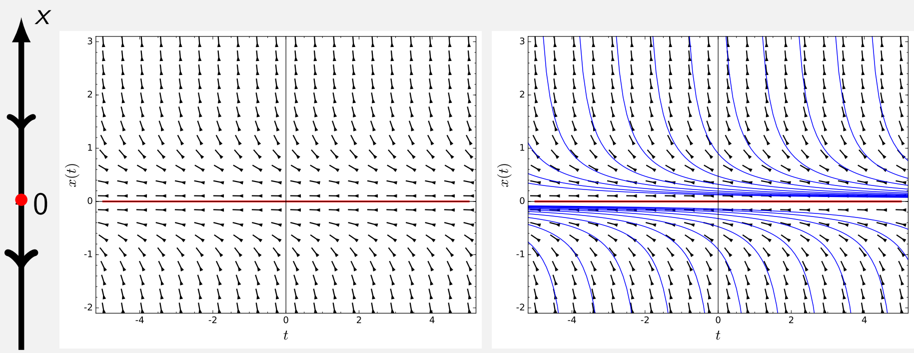


$$x(t) = x_0 \left[x_0(1 - \mathrm{e}^{t_0 - t}) + \mathrm{e}^{t_0 - t}\right]^{-1}$$

$$x' = -x + x^2 = (x-1) + (x-1)^2,$$

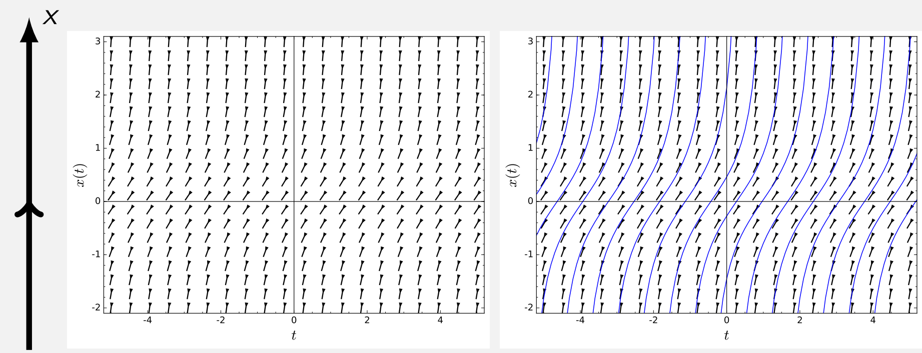
$$S(0_s) = (-\infty, 1)$$

$$x' = -x^2, \quad \mathcal{E} = \{0\}$$



$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}$$

$$x' = 1 + x^2, \quad \mathcal{E} = \emptyset$$



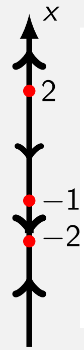
$$x(t) = \tan(t - t_0 - \arctan x_0)$$

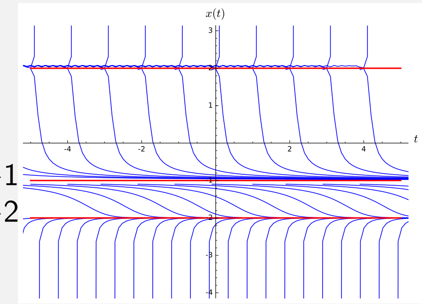
Pour p de degré au moins 3, l'équation $x' = p(x)$ n'a pas en général de solution exprimable en terme de fonctions classiques.

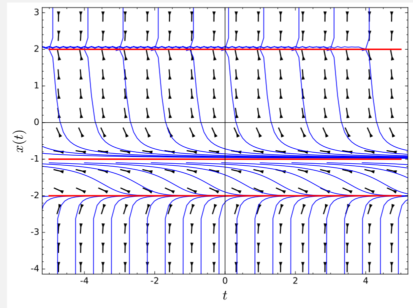
Les tracés (comme les précédents) ont été obtenus par des méthodes numériques approchées.

Néanmoins, suivant le signe de p sur les intervalles constituant $\mathbb{R} \setminus p^{-1}(0)$, on peut préciser aisément les zéros de p qui sont stables.

$$x' = (x^2 - 4)(x+1)^2, \quad \mathcal{E} = \{-2_s, 1, 2\}$$







$$p'(-2) = -4, \quad p'(-1) = 0, \quad p'(2) = 36$$

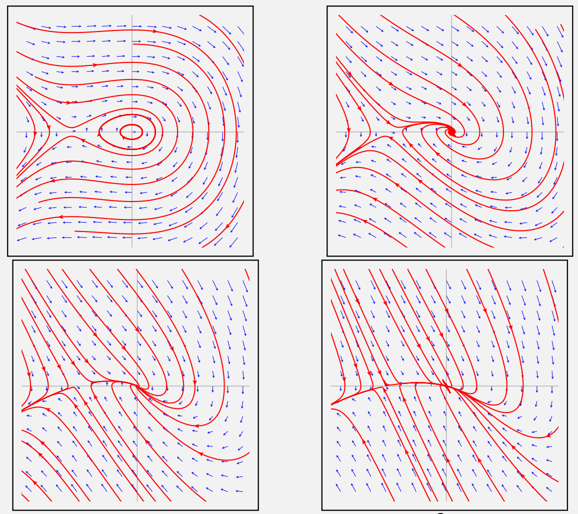
$$S(-2_s) = (-\infty, -1)$$

```
maxima('plotdf([1,(y-2)**2*(y**2-1)],[y,-3,3],[x,-2,2])')
```


Soit x_e un point d'équilibre de l'ÉD scalaire $x' = F(x)$. Si $F'(x_e) < 0$, alors le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable.

En dimension supérieure, une condition suffisante d'équilibre asymptotiquement stable au point d'équilibre x_e consiste en

$$\mathrm{Spectre}(DF(x_e)) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \Re e\, \zeta < 0\}.$$



Portrait de phase pour $(x' = y, y' = -x - x^2 - ay)$: en $(-1, 0)$ le PÉ est toujours un point selle ; en $(0,0)$ centre, foyer et nœuds pour $a = 0, 1, 2$ et 3.