1. Soit $p \in \mathbb{R}$. Calculer le gradient et la hessienne de l'application $(x, y, z) \mapsto r^p = (x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}$ définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Hess}_m\, r$ est positive en tout point.

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\nabla(h \circ J \circ \Phi)(x) = h' \circ J \circ \Phi(x)\, {}^{\mathsf{T}}\Phi'(x)\, [(\nabla J) \circ \Phi]$$
Calculer le gradient de $x \mapsto \|x\|^p$ en dehors de l'origine, avec p réel et $\| \ \|$ la norme euclidienne.
Donner une formule analogue pour $\mathrm{Hess}(h \circ J \circ \Phi)$.

3. Déterminer pour chacune des fonctions suivantes les points critiques et leurs types
$f_2(x, y) = y - 4x^2 + 3xy - y^2$ $\qquad$ $f_3(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2$
$f_4(x, y) = 4x - 6y + x^2 - xy + 2y^2$ $\qquad$ $f_5(x, y) = 12x - 4y - 2x^2 + 2xy - y^2$
$f_6(x, y) = xy + x^3 + y^3$ $\qquad$ $f_7(x, y) = x^4 + x^2 - 6cy + 3y^2$
$f_8(x, y) = x^4 + x^2 + xy - y^2$ $\qquad$ $f_9(x, y) = x^2 - 6xy + 10x - 2y - 5$
$f_{10}(x, y) = xy^2 + x^3 y - xy$ $\qquad$ $f_{11}(x, y) = 3x^4 + 3x^2 y - y^3$
$f_{12}(x, y) = (x - 1)^6 + (x - \mathrm{e}^y)^4$ $\qquad$ $f_{13}(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$
$f_{14}(x, y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ $\qquad$ $f_{15}(x, y) = \mathrm{e}^{x \sin y}$
$f_{16} = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y} - x - 2y$ $\qquad$ $f_{17} = \dfrac{xy}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$
$f_{18} = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$ $\qquad$ $f_{19} = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 2axy (a \geq 0)$
$f_{20} = (x^2 + y^2)^x$

4. Soit C le cercle de rayon 1 et Δ la droite d'équation $x + y = L$ avec $L > \sqrt{2}$. Soit J la fonction définie par
$$J(M, P) = \|M - P\|^2, \quad M \in C, P \in \Delta.$$
Exprimer la fonction J en fonction des variables θ, u paramétrant C et L :
$$C = \{(\cos\theta, \sin\theta), \theta \in \mathbb{R}\}, \qquad \Delta = \{(L/2 + u, L/2 - u), u \in \mathbb{R}\}.$$
Étudier les points extrémaux de J et leurs types. En donner une description géométrique.

5. Soit $f : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n^2 + (1 + x_n^3) \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$. Déterminer les points critiques de f : quels sont leur type ? Montrer que 0 est un minimum local, mais non global.

6. Trouver les extrema locaux sur $]-1/2, 1/2[^2$ de la fonction f donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2)$. Même question sur $[-1/2, 1/2]^2$.

7. Trouver les extrema locaux de la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ définie par $f(x, y) = xy/[(1+x)(1+y)(x+y)]$

8. Trouver les extrema locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \mathrm{e}^{x \sin y}$. Même question sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

9. Soit U_1, U_2 définies sur $\mathbb{R}_{++}^2$ définie par $U_1(x, y) = (\ln x + \ln y)^2$ et $U_2(x, y) = U_1(x, y) + \mathrm{e}^{-x}$. Les fonctions U_1 et U_2 sont-elles coercives ? Atteignent-elles leur minimum ? Décrire leurs ensemble de minimum.

10. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, $U_0(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $U_a(x) = U_0(x - a)$.
   (1) Montrer que $\nabla U_0(x) = 2x$ et $\nabla U_a(x) = 2(x - a)$.
   (2) Montrer que le problème d'optimisation
   $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} (U_0(x - a) + U_0(x - b) + U_0(x - c))$$
   a une unique solution qui est un minimum strict.
   (3) Que dire du problème d'optimisation
   $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} (\|x - a\| + \|x - b\| + \|x - c\|)?$$

11. L'aire du triangle avec des côtés de longueurs ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 est
$$A(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \sqrt{p(p-\ell_1)(p-\ell_2)(p-\ell_3)}$$
où $2p = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$.
Montrer que le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé peut se mettre sous la forme
$$\max_{y \in C} B(y)$$
où C est compact. En déduire que ce problème admet une solution.
Montrer qu'il est équivalent à un programme avec contrainte d'égalité. Conclure.

12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = xy(1-x) + y(1-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (1) Calculer $\nabla f(x,y)$ et $\operatorname{Hess} f(x,y)$.
   (2) Déterminer les points critiques de f, discuter leur nature.
   (3) Quels sont parmi les points critiques ceux qui réalisent un maximum local de f ? La fonction f admet-elle un maximum global (unique ?), un minimum global (unique ?).
   (4) Tracer les courbes de niveau dans $\mathbb{R}^2$.

13. Étudier les extrema de f sous contraintes $g = 0$
   (1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ et $g(x,y) = x + y - 1$
   (2) $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = x + 3y - 4$
   (3) $f(x,y) = x^2 + y$ et $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3$
   (4) $f(x,y,z) = 2xyz$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$
   (5) $f(x,y,z) = 2xyz$ et $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 1, x + z - 1)$
   (6) $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

14. Chercher les minima et maxima de la la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 - x + y^2 - z^2 = 1$

15. Etudier les maxima et optima de la fonction $f(x,y,z) = xyz$ sous la contrainte $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1$

16. Soit A matrice symétrique d'ordre n définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J_{A,b}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par
$$J_{A,b}(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
La fonction $J_{A,b}$ a un minimum unique noté x_*. Le spectre $\sigma(A)$ de A est ordonné $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, où les valeurs propres multiples sont répétées suivant leur multiplicité. Le conditionnement $\kappa(A)$ de A est défini par $\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$. On notera par $\langle \ , \ \rangle_A$ et $\| \ \|_A$ le produit scalaire et sa norme associée déterminée suivant $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle$.
   (1) Exprimer x_* en fonction de A et b.
   (2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(e_k, r_k, x_k)_{k\geq 0}$ la suite vérifiant
$$e_k = x_k - x_*, \quad r_k = Ax_k - b, \quad x_{k+1} = x_k - \alpha r_k.$$
      (a) Montrer que $Ae_k = r_k$, puis donner une relation entre e_k et e_0.
      (b) Montrer que la suite x_k converge vers x_* si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_n$. Donner le α_* qui assure la convergence la meilleure de la suite x_k et montrer que pour cet α_*
$$\|e_k\| \leq \left(\frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}\right)^k \|e_0\|.$$
   (3) Soit $(e_k, r_k, x_k, \alpha_k)_{k\geq 0}$ la suite vérifiant
$$e_k = x_k - x_*, \quad r_k = Ax_k - b \quad \alpha_k = \langle r_k, r_k\rangle / \langle Ar_k, r_k\rangle, \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k r_k.$$
   On supposera r_k non nul pour tout k.
      (a) Montrer que
$$\|r_{k+1}\|_{A^{-1}}^2 = \|r_k\|_{A^{-1}}^2 - \|r_k\|^4 / \|r_k\|_A^2$$
      En déduire que
$$\frac{\|r_{k+1}\|_{A^{-1}}}{\|r_k\|_{A^{-1}}} \leq \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

(b) Montrer que

$$\|e_k\|_A \leq \left(\frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}\right)^k \|e_0\|_A.$$

On admettra l'inégalité de Kantorovitch (la première inégalité découle de Cauchy-Schwarz)

$$\|x\|^2 \leq \|x\|_A \|x\|_{A^{-1}} \leq \frac{\lambda_1+\lambda_n}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}\|x\|^2.$$

(4) Soit $(e_k, r_k, \alpha_k, x_k, K_{x_0,k})_{k\geq 0}$ la suite vérifiant

$$e_k = x_k - x_*, \quad r_k = Ax_k - b \quad \alpha_k = \langle r_k, r_k\rangle / \langle Ar_k, r_k\rangle, \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k r_k.$$

avec $K_{x_0,k} = \mathrm{Vect}(r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0)$ le sous-espace de Krylov d'ordre k et d'opérateur A engendré par le vecteur x_0.

(a) Montrer par récurrence que

$$x_k = x_0 + AP(A)r_0 = x_* + [1 + AP(A)](x_0 - x_*)$$

avec P polynôme de degré au plus $k-1$.

(b) Montrer que

$$\|e_k\|_A = \inf\{\|e_0 + AP(A)e_0\|_A, P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}$$

où $\mathbb{R}_d[X]$ est l'espace des polynômes de degré au plus d.

(c) Montrer que

$$\|e_k\|_A = \|e_0\| \max_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|$$

et en déduire que $x_n = x_*$.

(d) Montrer que

$$\sqrt{\lambda_1}\|v\|_A \leq \|Av\| \leq \sqrt{\lambda_n}\|Av\|$$

puis que

$$\|r_k\| \leq \sqrt{\kappa(A)}\frac{\|e_k\|_A}{\|e_0\|}\|r_0\|_A.$$

(e) Soit T_k le polynôme de Tchebytchev de degré k et $Q_{A,k}$ le polynôme défini par

$$Q_{A,k}(x) = \frac{T_k\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1-2\lambda}{\lambda_n-\lambda_1}\right)}{T_k\left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\right)}.$$

Montrer que pour $\lambda \in \sigma(A)$

$$|Q_{A,k}(\lambda)| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)}-1}{\sqrt{\kappa(A)}+1}\right)^k$$

et en déduire que

$$\|e_k\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)}-1}{\sqrt{\kappa(A)}+1}\right)^k \|e_0\|_A.$$

On rappelle que

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k\arccos x) & \text{si } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^k + (x-\sqrt{x^2-1})^k] & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

17. Soit A définie positive d'ordre n, $b \in \mathbb{R}^n$ et J définie sur $\mathbb{R}^n$ par $J(x) = \langle Ax, x\rangle/2 - \langle x, b\rangle$ avec x_* son unique point de minimum.

    La suite (x_k, r_k, d_k) de la méthode du gradient conjugué est définie à partir de la valeur initiale
$$x_0, \quad r_0 = Ax_0 - b = A(x_0 - x_*), \quad d_0 = -r_0$$
    et, tant que $r_k \neq 0$, suivant la récurrence
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\langle r_k, d_k\rangle}{\|d_k\|_A} d_k, \quad r_{k+1} = Ax_{k+1} - b, \quad d_{k+1} = -r_{k+1} + \frac{\langle r_{k+1}, d_k\rangle_A}{\|d_k\|_A^2} d_k.$$

    (1) En remarquant que
$$x_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\alpha\in\mathbb{R}}[\alpha \mapsto J(x_k - \alpha d_k)],$$
    montrer que le vecteur x_{k+1} est le point de minimum de J sur l'espace
$$V_k = x_0 + \mathrm{Vect}(d_0, d_1, \dots, d_k).$$

    (2) Montrer par récurrence que
$$V_k = x_0 + \mathrm{Vect}(r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0)$$
    En remarquant $J(x) = J(x_*) + \|x_k - x_*\|_A^2/2$, en déduire que
$$x_{k+1} = \operatorname{argmin}_{P\in\mathbb{R}_k[X]} \|(1 + P(A)A)(x_0 - x_*)\|_A$$
    où $\mathbb{R}_k[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré au plus k.

    (3) Montrer que pour S polynôme
$$\|S(A)\| = \sup_i |S(\lambda_i)|$$
    si (λ_i) est le spectre de A.

    (4) Soit $\tau_1 > \tau_2 > \dots \tau_r$ la suite des valeurs propres disctinctes de A et Q_r le polynôme $Q_r(X) = \left[\prod_{j=1}^r (1 - X/\tau_j) - 1\right]/X$. Évaluer $\max_{i=1}^r(1 + \lambda_i Q_r(\lambda_i))$ et en déduire que la suite (x_k) atteint en au plus r étapes le point de minimum x_*.

18. Soit A surjective. Montrer que l'opérateur $P_A = {}^{\mathsf{T}}A(A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A$ est bien défini et de norme (euclidienne) 1. On pourra marquer que P_A est un projecteur orthogonal.

19. Soit la fonction J définie sur $\mathbb{R}^2$ suivant $J(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

    (1) Prouver que tous ses ensembles de niveau sont compacts.

    (2) Déterminer tous ses points critiques, ainsi que leur nature.

    (3) On applique l'algorithme du gradient à pas fixe à la minimisation de J.

      (a) Prouver que, pour tout point initial $M_0 = (x_0, y_0)$, l'algorithme produit, pour h assez petit, une suite bornée.

      (b) Fixons h. Montrer que si $\|M_0\|$ est assez grand, alors la suite (M_k) tend vers $+\infty$.

      (c) Montrer que l'itération de $M_0 = (u_0, u_0)$ au pas constant h se réduit à l'étude d'une suite numérique $(u_k(h))$. Pour $M_0 = (1, 1)$, calculer les itérés avec le pas $h = 0.25$. Que se passe-t-il avec $h = 0.5$? Faire une étude analogue pour $M_0 = (u_0, -u_0)$.

20. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$, A inversible et B deux matrices symétriques d'ordre n et la fonction $J_{A,B,\ell} = K_{A,\ell} + L_B$ avec $K_{A,\ell}(x) = \frac{1}{2}\|Ax\|^2 + \langle \ell, x\rangle$ et $L_B(x) = \frac{1}{3}\|Bx\|^3$.

    (1) Montrer que la fonction $J_{A,B,\ell}$ est coercive.

    (2) Montrer que $K_{A,\ell}$ est indéfiniment différentiable. Calculer son gradient et sa hessienne en $x \in \mathbb{R}^n$.

    (3) Montrer que L_B est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ avec
$$\nabla_x L_B = \|Bx\| B^2 x$$
    Montrer que L_B est deux fois différentiable à l'origine, avec sa dérivée seconde nulle.

(4) Montrer que L_B est indéfiniment différentiable en dehors de la partie $\{Bx = 0\}$ et que

$$\mathrm{Hess}_x\, L_B(h) = \|Bx\|\,\|Bh\|^2 + \|Bx\|^{-1}\langle Bx, Bh\rangle^2.$$

Suggestion : On pourra remarquer que

$$D(kF)(x)[h] = \langle \nabla k(x), h\rangle F(x) + k(x)DF(x)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n$$

si $k : V(\subset R^n) \to \mathbb{R}$ et $F : V \to \mathbb{R}^n$. En particulier, vu que $\nabla(\varphi \circ J)(x) = \varphi' \circ J(x)\nabla J(x)$ et $\mathrm{Hess}(J)[h] \simeq \langle D(\langle \nabla J, \cdot\rangle)(h), h\rangle$,

$$\mathrm{Hess}(\varphi \circ J)[h] = \langle \nabla k(x), h\rangle\langle F(x), h\rangle + k(x)\,\mathrm{Hess}\, J(x)[h], \quad x \in V, h \in \mathbb{R}^n$$

avec $k = \varphi' \circ J$.

(5) On suppose que B est inversible. Déduire de ce qui précède l'existence de α tel que $J_{A,B,\ell}$ soit α-elliptique, puis que que $J_{A,B,\ell}$ a un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$.

(6) Reprendre la question précédente lorsque B n'est pas inversible.

21.

(1) Soit B une matrice d'ordre $p \times n$. Montrer que B est de rang n si et seulement si ${}^{\mathsf{T}}BB$ est inversible.

(2) Montrer qu'une matrice A carrée est symétrique définie positive si et seulement si elle se factorise comme $A = {}^{\mathsf{T}}HH$ avec H carrée inversible.

(3) Soit le problème dit des *moindres carrés* $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$ où $b \in \mathbb{R}^p$ et A est une matrice $p \times n$, (avec en général $p \geq n$).

(a) On suppose que la norme considérée est la norme euclidienne, *i. e.* $\|x\|^2 = {}^{\mathsf{T}}xx$. Calculer le gradient de la fonction J à minimiser. Quel est alors un point candidat pour être minimum ?

(b) Calculer la hessienne de J ; conclure.

(c) Reprendre l'expression du minimum lorsque le problème est pondéré c'est à dire $\|x\|$ est la norme donnée par $\|x\|^2 = {}^{\mathsf{T}}xQx$ avec Q une matrice symétrique définie positive.

22. Soit A à m lignes (supposées ici linéairement indépendantes) et n colonnes, $b \in \mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La plus courte distance $d(x_0, E_{A,b})$ entre un point x_0 et le sous-espace $E_{A,b}$ d'équation $Ax = b$ peut s'écrire comme le programme quadratique

$$\min_{Ax=b} {}^{\mathsf{T}}(x - x_0)(x - x_0).$$

Montrer que le multiplicateur de Lagrange à l'optimum est $\lambda_* = -({}^{\mathsf{T}}AA)^{-1}(b - Ax_0)$ et que la solution est $x_* = x_0 + {}^{\mathsf{T}}A(A^{\mathsf{T}}A)^{-1}(b - Ax_0)$

Montrer que dans le cas où A est un vecteur ligne, le sous-espace $E_{A,b}$ est un hyperplan et que

$$d(x_0, E_{A,b}) = \frac{\|Ax_0 - b\|}{\|A\|}.$$

23. Soit U définie par $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que U restreinte à $\{x^4 + y^4 + z^4 = 32\}$ admet $(0, 2, 2)$ comme extremum, qui n'est pas un minimum (local), ni un maximum.

24. Étudier les extrema de $U(x, y) = x^2 + y$ sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 3$.

25. Soit J la fonction définie par $J(x, y) = x + y^2$ et D le demi-disque $D = \{x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Discuter les extrema de J sur D et ceux de sa restriction $J_{|\partial D}$ à son bord ∂D.

26. Soient a_i, b_i, c_i réels positifs non nuls. Étudier le programme

$$\inf_{\sum a_i x_i \leq b} \sum c_i x_i^{-1}.$$

27.

(1) En étudiant les extrema de la fonction $U(x) = x_1 \dots x_n$ sur $S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, montrer que

$$U(x) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \quad x \in S.$$

(2) Montrer que pour $x \in \mathbf{R}^n$

$$|x_1 \dots x_n| \leq \left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

28. Discuter suivant $a, b > 0$ les extrema de la fonction $U(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ soumis à la double contrainte $x + y + z = a$ et $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$.

29. Chercher les minima et maxima de la la fonction $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 - x + y^2 - z^2 = 1$

30. Soit l'ellipsoïde $E = \{\sum_{j=1}^n a_j x_j^2 = 1\}$ (tous les a_i sont positifs non nuls). Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le point x de E le plus proche de y vérifie $x_j = y_j/(1 + \lambda a_j)$ avec λ vérifiant

$$\sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{y_k}{1 + \lambda a_k}\right)^2.$$

31. Soit $p > 1$ et la norme $\|x\|_p$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_p^p = \sum_i |x_i|^p$. Soit $z \in \mathbb{R}^n$.
    (1) Montrer que la fonction $t \mapsto |t|^p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto p|t|^{p-1}t^{-1}$.
    (2) Soit $z \in \mathbb{R}^n$ et $\zeta = (z_i \operatorname{sign}(z_i))$. Montrer que
    $$\max_{\|x\|_p \leq 1} \langle z, x\rangle = \max_{\|\xi\|_p \leq 1} \langle \zeta, \xi\rangle.$$
    puis que
    $$\min_{\|x\|_p \leq 1} \langle z, x\rangle = - \max_{\|x\|_p \leq 1} \langle -z, x\rangle.$$
    (3) Résoudre les programmes
    $$\max_{\|x\|_p \leq 1} \langle z, x\rangle, \quad \min_{\|x\|_p \leq 1} \langle z, x\rangle$$
    et en déduire l'inégalité de Hölder
    $$|\langle z, x\rangle| \leq \|x\|_p \|z\|_q, \quad x, z \in \mathbb{R}^n$$
    avec q déterminé par $p^{-1} + q^{-1} = 1$. L'inégalité précédente est-elle égale pour $x, z \in \mathbb{C}^n$?
    (4) Résoudre le programme
    $$\max_{\|x\|_p = 1} \langle z, x\rangle.$$
    On étudiera la validité de la condition lagrangienne du deuxième ordre au point de maximum.

32. Soit A symétrique. Montrer que le programme

$$\max_{\|x\|_2 = 1} \langle Ax, x\rangle$$

a pour solution un vecteur propre de A. Comment interpréter sa valeur propre ?.

33. L'aire du triangle de côtés c_1, c_2, c_3 est donnée par la formule de Héron

$$A(c_1, c_2, c_3) = \sqrt{p(p - c_1)(p - c_2)(p - c_3)}$$

où $2p = c_1 + c_2 + c_3$.
    (1)
    (2) Exprimer le problème de maximisation d'aire à périmètre $2p$ fixé en le mettant sous la forme
    $$\max_{y \in C} B(y)$$
    où C est compact convenablement choisi de même que la fonction B.
    (3) Montrer que ce problème admet une solution et qu'il est équivalent à
    $$\max_{y \in \operatorname{Int}(C)} B(y).$$
    (4) Conclure.

34. Soit M_n l'espace des endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ euclidien.
   (1) Montrer que $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}({}^{\mathsf{T}}AB)$ définit un produit scalaire sur M_n. Introduit par Frobenius, il sera noté $\langle\ ,\ \rangle_F$.
   (2) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $P_{x,y}$ l'opérateur de rang 1 définit par $P_{x,y}(v) = x\langle y, v\rangle$. Montrer que la forme linéaire $A \in M_n \mapsto \langle y, Ax\rangle$ est représenté dans M_n par l'opérateur $P_{y,x}$, *i. e.* $\operatorname{tr}({}^{\mathsf{T}}AP_{y,x}) = \langle y, Ax\rangle$.
   (3) Soit K symétrique définie positive. Étudier le programme

$$\min_{H={}^{\mathsf{T}}H,\, Hx=y} \|H-K\|_F^2$$

35. Soit W, K symétriques définies positives d'ordre n, x, y dans $\mathbb{R}^n$ avec $Wy = x$. Soit $\|\ \|_W$ la norme de Frobenius pondérée par W définie par

$$\|A\|_W^2 = \|W^{1/2}AW^{1/2}\|_F^2 = \operatorname{tr}(W^{1/2\mathsf{T}}AWAW^{1/2})$$

Étudier le programme

$$\min_{H={}^{\mathsf{T}}H,\, Hx=y} \|H-K\|_W^2$$

36. Montrer pour a, b, c positifs

$$\sqrt{\frac{b+c}{2a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{2b+c+a}} + \sqrt{\frac{a+b}{2c+a+b}} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

37. Soit A une matrice d'ordre (m,n), $b \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Écrire les conditions d'optimum du premier ordre nécessaires pour les deux programmes

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} [\|Ax-b\|^2 + 2\langle c, x\rangle], \qquad \min_{\substack{y\in\mathbb{R}^m \\ {}^{\mathsf{T}}Ay=c}} \|y-b\|.$$

38. Soient (a_i, b, c_j) positifs non nuls. Résoudre le programme

$$\min_{\substack{\sum_{i=1}^n a_ix_i \le b \\ x_i \ge 0}} \sum_{i=1}^n c_ix_i^{-1}$$

39. En écrivant les différentes conditions de Karush-Kuhn-Tucker, résoudre le programme.

$$\inf_{x^2+y^2\le 1} [y^2 - 2x - x^2].$$

40. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 et le programme

$$\inf_{\substack{\|x\|\le 1/2 \\ \langle b,x\rangle \le 0}} [-\ln(1-\|x\|^2) + \langle b, x\rangle].$$

Calculer la hessienne de $U(x) = -\ln(1-\|x\|^2) + \langle b, x\rangle$ et en déduire que la fonction U est strictement convexe.

Montrer que le programme a une solution unique (utiliser un argument de convexité) et appliquer les conditions KKT avant de résoudre le programme.

41. Étudier les conditions KKT pour le programme

$$\min_{x^2+y^2\le 9} [x^3 + y^2]$$

42. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ avec $u \le v$. Résoudre les programmes

$$\min_{u\le x\le v} \left[\|x\|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\right]$$

$$\min_{u\le x\le v} \left[\|x\|^2 + \sum_{1\le i,j\le n} x_ix_j\right] \qquad\qquad \sup_{u\le x\le v} \left[\|x\|^2 + \sum_{1\le i,j\le n} x_ix_j\right]$$

43. Soient $u,v\in\mathbb{R}^n$ et M réel. Étudier les programmes

$$\min_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left[\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\|y\|^2+2\langle u,x\rangle+2\langle v,y\rangle\right]$$

$$\min_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\ \langle u,x\rangle+\langle v,y\rangle\le M}}\left[\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\|y\|^2+2\langle u,x\rangle+2\langle v,y\rangle\right]$$

44.

(1) Résoudre le programme

$$\max_{\|x\|_p\le 1}\langle z,x\rangle$$

et en déduire l'inégalité de Hölder, avec q déterminé par $p^{-1}+q^{-1}=1$,

$$|\langle z,x\rangle|\le\|x\|_p\|z\|_q,\quad x,z\in\mathbb{R}^n.$$

(2) Résoudre le programme

$$\max_{\|x\|_p=1}\langle z,x\rangle.$$

On étudiera la validité de la condition lagrangienne du deuxième ordre au point de maximum.

45. Montrer que C est convexe si et seulement si $\theta_1x_1+\ldots+\theta_nx_n\in C$ pour tout $x_1,\ldots,x_n$ dans C et des réels $\theta_1,\ldots,\theta_n$ positifs tels que $\theta_1+\ldots+\theta_n=1$.

46. Déterminer si les parties suivantes sont convexes.

(1) La tranche $\{x\in\mathbb{R}^n,\alpha\le\langle a,x\rangle\le\beta\}$.
(2) Le rectangle $\{x\in\mathbb{R}^n,\alpha_i\le x_i\le\beta_i\}$.
(3) Le secteur $\{x\in\mathbb{R}^n,\langle a_1,x\rangle\le\alpha_1,\langle a_2,x\rangle\le\alpha_2\}$.
(4) Pour S partie et $x_*\in\mathbb{R}^n$, la partie $\{x\in\mathbb{R}^n,\|x-x_*\|\le\|x-s\|,s\in S\}$.
(5) Pour S,T parties, la partie $A_{S,T}=\{x\in\mathbb{R}^n,d(x,S)\le d(x,T)\}$ avec $d(x,S)=\inf_{s\in S}\|x-s\|$.
(6) La partie $\{x\in\mathbb{R}^n,x+S_2\subset S_1\}$ si S_1,S_2 sont deux convexes

47. Soit C une partie convexe d'un Hilbert H et $\varepsilon>0$ Montrer que

$$C_\varepsilon=\left\{y\in H,d(y,C)=\inf_{x\in C}\|x-y\|\le\varepsilon\right\}$$

est un convexe.

48. Soient a,b deux points distincts de $E=\mathbb{R}^n$ (ou E Hilbert). Montrer que $P=\{\|x-a\|\le\|x-b\|\}$ est convexe, en fait un demi-espace $\{\langle v,x\rangle\le c\}$ où on précisera le vecteur v et le scalaire c.

49. Soit $x_c\in\mathbb{R}^n$ et A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. Montrer que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ de centre x_c défini par $\mathcal{E}=\{x:\langle A(x-x_c),x-x_c\rangle\le 1\}$ est convexe.

50. Soit A matrice symétrique d'ordre n, $b\in\mathbb{R}^n$, c réel et $C=\{x\in\mathbb{R}^n,\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle+c\le 0\}$.
(1) Montrer que C est convexe si A est positive
(2) Soit $g\in\mathbb{R}^n$ non nul et h réel. Montrer que $C\cap\{\langle g,x\rangle+h=0\}$ est convexe s'il existe λ réel telle que $\langle Ax,x\rangle+\lambda\langle g,x\rangle^2$ soit positive.
(3) Que dire des réciproques ?

51. Soit A matrice d'ordre (m,n), $b\in\mathbb{R}^m$, $c\in\mathbb{R}^n$, $d\in\mathbb{R}$ et $f(x)=(Ax+b)/(\langle c,x\rangle+d)$ avec $\mathbf{dom}\,f=\{x\in\mathbb{R}^n,\langle c,x\rangle+d>0\}$. Montrer que si $C\subset\mathbb{R}^n$ et $D\subset\mathbb{R}^m$ sont convexes, alors $f(C\cap\mathbf{dom}\,f)$ et $f^{-1}(D)\cap\mathbf{dom}\,f$ sont convexes.

52. Montrer que la partie

$$\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3,\exp(x/t)\le y/t,t>0\}$$

est un cône convexe.

53. Si C est un cône de l'espace E muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, son dual C^* est la partie de E définie par
$$C^* = \{x \in E, \langle x, y\rangle \geq 0, y \in C\}.$$
   (1) Montrer que C^* est un cône convexe.
   (2) Montrer que $C = C^*$ si $C = \{x = (x_i), x_i \geq 0\}$ dans $\mathbb{R}^n$, $C = \{(u, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \|x\| \leq u\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $C = \{X \text{ symétrique positive d'ordre } n\}$ avec le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XY)$.
   (3) Soit $S_{\alpha,\beta}$ le secteur plan $S_{\alpha,\beta} = \{\alpha \leq \arg z \leq \beta\}$. Déterminer son dual.

54. Montrer que $A + B$ est convexe si A et B le sont.

55. Soit C convexe d'intérieur non vide.
   (1) Donner un C avec un bord convexe.
   (2) Montrer que si $\overline{C}$ est compact, alors le bord de C est non convexe.
   (3) Si C est fermé montrer qu'il existe $z \in (x, y)$ dans le bord de C dès que x est intérieur à C et $y \notin C$.

56. Soit $\|\ \|_1$ la norme $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ sur $\mathbb{R}^2$. La partie $\{\|(x, y)\|_1 \leq \|(x, y) - (a, a)\|_1\}$ est-elle convexe ?

57. Soit C convexe. Montrer que son ε-voisinage C_ε défini par
$$C_\varepsilon = \{x, d(x, C) \leq \varepsilon\}$$
est convexe.

58. Montrer que K est convexe. La partie K est alors dite *cœur convexe* de C.

59. Montrer que la projection P sur le parallélotope $p = \prod[a_j, b_j]$ est donnée par $P(x_i) = (\min(\max(x_i, a_i), b_i))$.
    Si A et B sont des convexes fermésresp. de E et F, alors la projection $P_{A\times B}$ est égale à $P_\times P_B$.

60. Soit $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n, \sum_i x_i = c_0\}$. Montrer que le projeté $y = Px$ de x sur Σ est de coordonnées
$$y_i = x_i - \lambda \text{ avec } \lambda = m^{-1}(-c_0 + \sum_i x_i)$$

61. Un *cône convexe* d'un espace vectoriel E est une partie C telle que si $u, v \in C$, alors $\alpha u + \beta v$ appartienne à C pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.
   (1) Montrer qu'un cône convexe est convexe.
   (2) Montrer que les parties suivantes sont des cônes convexes.
      (a) $\{x = (x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$,
      (b) $\{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \|u\| \leq x\}$,
      (c) l'ensemble des matrices symétriques positives d'ordre n,
      (d) l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n,
      (e) $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \exp(x/t) \leq y/t, t > 0\}$.
   (3) Soit $S_{\alpha,\beta}$ le secteur plan $S_{\alpha,\beta} = \{\alpha \leq \arg z \leq \beta\}$. Déterminer son dual.

62. Pour K partie de E, on note K^+ son dual positif défini par $K^+ = \{u | \langle u, k\rangle \geq 0, k \in K\}$.
   (1) Montrer que K^+ est un cône convexe fermé.
   (2) Montrer que les quatre premiers cônes de l'exercice précédent sont autoduaux, *i. e.* vérifie $K = K^+$, mais pas le pénultième.

63. Montrer que $U : t \mapsto U(t) = t \operatorname{argsh}(t) - \sqrt{1 + t^2}$ est convexe.

64. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, $U : C \mapsto \mathbb{R}$, $x, y \in C$. Si U est convexe, alors l'application $U_{x,y} : t \in (0, 1) \mapsto U(tx + (1 - t)y)$ est convexe.

65. Soient f_1, f_2 convexes. Montrer que $f_1 \Box f_2$ définie par $f_1 \Box f_2(x) = \inf_y [f_1(y) + f_2(x - y)]$ est convexe.

66. Soit pour $U : \to \mathbb{R}$, la fonction $\Phi_{x,y}(t) = U(tx + (1-t)y) - tU(x) - (1-t)U(y)$. On suppose $U'' \geq 0$. En calculant la dérivée $\Phi''_{x,y}$, montrer que $\Phi'_{x,y}$ est croissante, puis qu'il existe un c tel que $\phi'_{x,y}(c) = 0$ (on remarquera $\Phi_{x,y}(0) = \Phi_{x,y}(1) = 0$ et on appliquera le théorème de Rolle). En déduire que $\Phi_{x,y}$ est croissante sur $[c, 1]$, décroissante sur $[0, 1]$. En résulte $\Phi_{x,y}(t) \geq 0$.

67. Montrer qu'une fonction U définie sur une partie convexe C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si son épigraphe
$$E_U = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R}, y \geq U(x)\}$$
est convexe.

68. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est quasi-concave.

69. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$.
    (a) Montrer que la fonction U définie sur C est convexe si et seulement si
    $$U(\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n) \leq \theta_1 U(x_1) + \ldots + \theta_n U(x_n)$$
    pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans C et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ positifs tels que $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 1$.
    (b) En déduire pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positifs
    $$\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$
    (c) Montrer que toute fonction continue V mid-convexe sur le convexe C, *i. e.* vérifiant
    $$V((x+y)/2) \leq (V(x) + V(y))/2, \quad x, y \in C,$$
    est convexe. *On pourra utiliser le fait que* $2^{-n}E[2^n\alpha] \to \alpha$ *lorsque* $n \to \infty$.
    (d) Montrer que $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$ pour $x \geq 0$. En déduire que $p_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^n$ est mid-convexe, puis que la fonction p_n est convexe pour $n \geq 1$.

70. Montrer que $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto x^2/y$ est convexe : est-elle strictement convexe ? En déduire la convexité de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \|x\|^2/x_1$, où $\|\ \|$ est la norme euclidienne.

71. Montrer que U est log-convexe si et seulement si $U((x+y)/2) \leq \sqrt{U(x)U(y)}$. En utilisant $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, en déduire qu'une fonction log-convexe est convexe.

72. Montrer que U est log-convexe si et seulement si le trinôme $U(x)T^2 - 2U((x+y)/2)T + U(y)$ est positif sur $\mathbb{R}$. En déduire que la somme de deux fonctions log-convexe l'est aussi.

73. Une fonction U à valeurs positives non nulles est dite log-convexe si la fonction $\ln U$ est convexe.
    (a) Montrer qu'une fonction log-convexe est convexe.
    (b) Montrer qu'une fonction U d'une variable réelle est log-convexe si et seulement la fonction $x \mapsto U(x)\alpha^x$ est convexe pour tout $\alpha > 0$. En déduire que la somme de deux fonctions log-convexes est log-convexe.
    (c) Montrer que la fonction $W : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(\mathrm{e}^s + \mathrm{e}^t)$ est convexe. En déduire à nouveau que la somme de deux fonctions log-convexes est log-convexe.
    (d) Soit U deux fois dérivable. Donner une condition différentielle caractérisant la log-convexité de U.

74. Soit $h \in \mathcal{C}^0[0, 1]$. Montrer que la fonction
$$u \in \mathcal{C}^1[0, 1] \mapsto \int_0^1 \left[u'(t)^2 + u(t)h(t)\right] dt \in \mathbb{R}$$
est convexe.

75. Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilités Ω et U une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$U(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[U(X)].$$
    (a) si Ω est fini ;
    (b) si Ω quelconque en intégrant l'inégalité de convexité $U(x) - U(\mathbb{E}(X)) \geq C(x - \mathbb{E}(X))$ où la valeur de C sera précisée.

76. La conjuguée de Fenchel-Nielsen f^* de la fonction f est définie suivant
$$f^*(\lambda) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} [\langle \lambda, x\rangle - f(x)]$$
Calculer les conjuguées des fonctions suivantes
    (1) $L_h : x \in E \mapsto \langle h, x\rangle$.
    (2) $Q_A : x \in E \mapsto \langle Ax, x\rangle$ avec A défini positif.
    (3) $f_1 : t \mapsto t \ln t, \mathbf{dom}\, f_2 = \mathbb{R}^+$.
    (4) $f_2 : t \mapsto 1/t, \mathbf{dom}\, f = \mathbb{R}^+$.
    (5) $L(x) = \ln(\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{x_i})$.
    (6) $f_3(x) = \mathrm{ch}(x)$.
    (7) $F_p(x) = \|x\|^p/p$ avec $p > 1$.

    Réponses 1. $\mathbf{dom}(L_h)^* = \{h\}, (L_h)^*(h) = 0$, 2. $(Q_A)^*(\lambda) = \langle A^{-1}(\lambda), \lambda\rangle/4$, 3. $(t \ln t)^*(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda-1}$; 4. $\mathbf{dom}(1/t)^* = \mathbb{R}_-, (1/t)^*(\lambda) = -2\sqrt{-\lambda}$; 5. $\mathbf{dom}\, L^* = \{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0\}$, $L^*(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i$, 6. $\mathbf{dom}(\mathrm{ch})^* = \mathbb{R}$, $(\mathrm{ch})^*(\lambda) = \lambda \,\mathrm{argsh}(\lambda) - \sqrt{1+\lambda^2}$.

77. Soit pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie par $F(x) = f(\|x\|^2), a \in \mathbb{R}^n$ où on a utilisé la norme euclidienne. Étudier la fonction de Fenchel-Nielsen F en fonction des propriétés de f.

78. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{ch}\, x$ est fortement convexe, mais pas $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x$.

79. Montrer que la fonction xy n'est ni concave, ni convexe sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction xy est quasi-concave sur $\mathbb{R}^2_+$, mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

80. Soit $\mathcal{S}^n_+$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n. Montrer que l'application $X \in \mathcal{S}^n_+ \mapsto \ln \det X^{-1}$ est convexe.

81. Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ par
$$f(x) = \max\{i, x_i \neq 0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$
et $f(0) = 0$. Montrer que f est quasi-convexe.

82. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et f définie par $f(x) = \|x - a\|/\|x - b\|$. Montrer que f est quasi-convexe sur le demi-espace $E = \{\|x - a\| \leq \|x - b\|\}$.

83. Soit $f : (x, y) \in C \mapsto f(x, y)$ convexe. Montrer que F définie par $F(x) = \inf_y f(x, y)$ est convexe.

84. Si f est convexe sur le cône convexe $C \subset \mathbb{R}^n$, montrer que la fonction $F : (x, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mapsto t f(x/t)$ est convexe.

85. Soit A opérateur symétrique positif sur E, Q la forme quadratique déterminée par A ($Q(x) = \langle Ax, x\rangle$) et v un vecteur de E. Montrer que la fonction $U(x) = Q(x)/\langle v, x\rangle$ est convexe sur le demi-espace $\{\langle v, x\rangle > 0\}$.

86. Soit $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$ pour $k = 1, \ldots, p$. Soient U_1 et U_2 les fonctions
$$U_1(x) = \ln\left(\sum_{k=1}^p \mathrm{e}^{\alpha_k x + \beta_k}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad U_2(z) = \ln\left(\sum_{k=1}^p \mathrm{e}^{\langle \lambda_k, z\rangle + \beta_k}\right), \quad z \in \mathbb{R}^n.$$
    Montrer que U_1 est convexe sur $\mathbb{R}$ et que U_2 est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

87. Soient f, g convexes. Les fonctions $f + g, f - g, f \circ g, fg$ sont-elles convexes ?

88. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto \sqrt{1 + \|x\|^2} - \langle a, x\rangle$ est convexe. Quel est son minimum (s'il existe) ?

89. Étudier le domaine de définition de U définie par
$$U(x, y) = x \ln\left(\frac{x}{x+y}\right) + y \ln\left(\frac{y}{x+y}\right)$$
Montrer que U est convexe sur $\mathbb{R}^2_+$

90. Montrer que $V(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \ln x - \ln y$ est convexe, coercive sur $\mathbb{R}^2_+$. Est-elle strictement convexe ? Quel est est son minimum ? (s'il existe).

91. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs et $0 < s < r$ des entiers. Déterminer les optima et maxima de la fonction $\sum_i a_i x_i^{2r}$ sur la partie $\{\sum_i x_i^{2s} = 1\}$.

92. Calculer le gradient et la hessienne de $x \in U \subset \mathbb{R}^n \mapsto f(\|x\|^2)$ en fonction des dérivées de f.

93. Soit $a_n > 0, x_n$ tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(1 + |x_n|) < +\infty$. Montrer que la fonction $F(x) = \sum_n a_n |x - x_n|$ est dérivable sauf aux points x_n.

94. Soit J définie par
$$J(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 3x - 10y, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Étudier les deux programmes
$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3} J(m), \qquad \inf_{x+y+z^2=0} J(x,y,z)$$
Avant de calculer les points de minimum, on cherchera à établir leur existence par des arguments simples.

95. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = {}^{\mathsf{T}}(1,1,1)$ et la fonction J définie suivant $m \in \mathbb{R}^3 \mapsto J(m) = \langle Am, m \rangle /2 - \langle b, m \rangle$. Étudier les programmes
$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3} J(m), \qquad \inf_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 12 \\ x+3y \geq 0}} J(x,y,z), \qquad \inf_{x+y+z=\pi} J(x,y,z).$$
Indication : on pourra remarquer que si un point (x_*, y_*, z_*) est caractérisé de manière unique sous une condition invariante par la transformation cyclique $(x,y,z) \to (y,z,x)$, alors on a nécessairement $x_* = y_* = z_*$.

96. Soit $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strictement convexe avec un minimum. Montrer que U est coercive.

97. Soit E un espace vectoriel de dimension finie doté d'une norme $\| \ \|$. Soit A un sous-ensemble fermé non vide de E. Montrer que A est convexe si et seulement si la fonction distance par rapport à A est convexe. On rappelle que cette dernière est définie par $d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$.

98. Étudier la convexité ou la concavité de chacune des fonctions (on précisera le domaine de définition)
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz, \quad x \ln x + y \ln y + z \ln z, \quad x(x + y^2), \quad \ln(xy).$$

99. Soit, pour α réel, la fonction U_α définie par $x \in \mathbb{R}^n_{++} \mapsto U(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \ldots x_n)^\alpha$. Étudier la con[vex|cav]ité de U_α.

100. Soit la fonction U définie sur $\mathbb{R}^3$ par $U(x,y,z) = xyz + yz + xz + xy$.
    (1) Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^3$ où le matrice hessienne de U est semi-définie positive est le point $(-1,-1,-1)$.
    (2) Montrer que U ne possède aucun minimum local sur $\mathbb{R}^3$.

101. Rechercher les rectangles d'aire maximale dans une ellipse. Rechercher les triangles d'aire maximale à périmètre donné.

102. Soient les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}^2$ suivant :
$$f_1(x,y) = 1 + x^2 + y^3, \quad f_2(x,y) = xy, \quad f_3(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x^4.$$
    (1) Montrer que $(0,0)$ est un point critique pour f_1, f_2 et f_3.
    (2) Quelles sont les fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$ parmi f_1, f_2 et f_3 ?
    (3) Pour quelles fonctions $(0,0)$ est-il un minimum local, un minimum global ?

103. Soit la fonction U définie sur $\mathbb{R}^2$ par $U(x,y) = x^2 + y^2 + xy$. Montrer que U est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}$
En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où U atteint son minimum sur D

104. Soit la fonction U définie sur $\mathbb{R}^2$ par $U(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2\}$. Montrer que U est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où U atteint son minimum sur D.

105. Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $U_a(x,y) = x^2 + ay^2 + xy + x$ pour un paramètre $a \in \mathbb{R}$. On cherche à minimiser U_a sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \leq 1\}$. Pour quelles valeurs de a la fonction U_a est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Résoudre le problème posé dans ce cas. Lorsque U_a n'est pas convexe, U_a possède-t-elle un minimum sur C ?

106. Soit la fonction U définie sur $\mathbb{R}^2$ par $U(x,y) = x^2 + y^2 + xy$.
Montrer que U est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}$. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où U atteint son minimum sur D

107. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 - y^4 - 8x$. Montrer que f n'est pas coercive sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. f admet-elle des extrema locaux ? Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^4 = 1\}$. A est-il fermée ? borné ? Calculer les points où f est minimale sur A en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Vérifier le résultat en remplaçant y par sa valeur dans l'expression de f.

108. Soit C le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq 1 - x\}$ et soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 + xy$. On veut minimiser $f(x,y)$ sur l'ensemble C. Montrer que le problème admet une solution. Cette solution est-elle unique ? Vérifier que les contraintes sont qualifiées. Calculer la ou les solution(s).

109. Soit C le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1 \text{ et } y = x^2\}$ et soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + (y-2)^2 + z^2$. On veut minimiser U sur l'ensemble C. Montrer que le problème admet une solution. Cette solution est-elle unique ?

110. Soit le programme $\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ \|x\| \geq 1}} \|x\|$. Montrer que la suite $(1+2^{-k})(\cos k, \sin k)$ a tout point du cercle $\{\|x\| = 1\}$ comme point d'adhérence, solution du programme précédent.

111. Soit $v : x \in E \mapsto v(x) = (v_1(x), \ldots, v_m(x)) \in \mathbb{R}^m$. Exprimer les problèmes $\min_{x \in E} \|v(x)\|_\infty$ et $\min_{x \in E} \max_{i=1,\ldots,n} v_i(x)$. sous forme de programmes lisses. En est-il de même pour $\min_{x \in E} \min_{i=1,\ldots,n} v_i(x)$?

112. Soit $C = \{1 \geq xy, 1 \geq x - y, 1 \geq y - x, x + y \geq -1\}$ et le programme $\min_{m \in C} [(x - 3/2)^2 + (y - t)^4]$. Pour quelles valeurs de t le point $(1,0)$ vérifie les conditions KKT ? Si $t = 1$, montrer que la/es solution(s) est saturée pour la première condition et déterminer ce point de minimum.

113. Résoudre les programmes $\min_{x^2+y^2=1} xy$ et $\max_{x^2+y^2 \leq 1} xy$.

114. Soit C le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, |4y - x| \geq 1\}$$
et soit U la fonction définie par $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto U(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème $\inf_{m \in C} U(m)$ admet une solution : cette solution est-elle unique ? La calculer.

115. Soit C le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z \leq 1, y + 2z \leq 0\}$$
et soit U la fonction définie suivant $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto U(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \in \mathbb{R}$.
Montrer que le programme $\min_{m \in C} U(m)$ admet une solution unique. Écrire les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre : sont-elles suffisantes ? Montrer que la solution du problème vérifie $x^2 + y^2 + z = 1, y + 2x < 0$

116. Soit U définie par $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto U(x,y) = -(x + y - 1/2)^2 - (x-y)^2 \in \mathbb{R}$. Montrer que U admet un minimum sur $[-1,1]^2$, qui se trouve sur le bord de $[-1,1]^2$ et le calculer.

117. Soit le programme
$$\min_{x+y \leq 1} [x^2 + ay^2 + xy + x]$$
Pour quelles valeurs de a ce programme convexe ? Résoudre ce problème lorsque $a \geq 1/4$. On suppose désormais que $a < 1/4$. Montrer que le programme n'a a pas de solution et qu'il existe cependant un multiplicateur de KKT en $(1 - 1/a, 1/a)$ dès que $a > 0$. Pourquoi est-ce possible ?

118. Soit C une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^n$ et soit p un réel supérieur strictement à 1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique point a de C tel que $\|a-x\|_p = \min_{y\in C} \|y-x\|_p$, ce point a étant caractérisé par l'inégalité

$$\sum_i (x_i - a_i)^{p-1}(y_i - a_i) \le 0, \quad y \in C.$$

119. Montrer que la fonction $U : (x_i) \in \mathbb{R}^n_{++} \mapsto \prod_{i=1}^n x_/ \sum_{i=1}^n x_i$ est log-concave.

120.

(1) Soit $K > 0$. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \log x + Kx^{-1}$ est coercive. Quel est son minimum ?

(2) Soient $K, L > 0$. Montrer que la fonction $a, b, c \in \mathbb{R}^3_+ \mapsto \log(abc) + K(ac)^{-1} + L(bc)^{-1}$ n'est pas coercive, mais que la fonction $a, b, c \in \mathbb{R}^2_+ \times (0,1) \mapsto \log(abc) + K(ac)^{-1} + L(bc)^{-1}$ l'est ; quel est son minimum ?

(3) La fonction

$$(x, y, r) \in \mathbb{R}^2_+ \times (-1, 1) \mapsto \log(xy(1-r^2)) + \frac{Ax^{-1} + By^{-1}}{1-r^2}$$

est-elle minorée ? Si oui, quel est son minimum ?

121. Soit U définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$U(x, y) = x^4 - x^3 + 2xy + y^2 - 2y + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(1) Montrer que U est coercive. Analyser ses extrema.

(2) Programmer la méthode du gradient à pas constant pour trouver son (ou un de ses) minimum.

122. Soit $f_{k,\lambda}$ la densité de la loi de Weibull définie par

$$f_{k,\lambda}(t) = (k/\lambda)(x/\lambda)k - 1\mathrm{e}^{-(x/\lambda)^k}$$

En utilisant la méthode de Newton, déterminer le paramètre (k, λ) correspondant au maximum de la vraisemblance

$$\prod_{i=1}^n f_{k,\lambda}(x_i)$$

induite par l'échantillon de n observations $x_1, \dots, x_n$.

123. Soit U continue et convexe sur le convexe compact C de $\mathbb{R}^n$. Montrer que U atteint son maximum en un point extrémal de C. Atteint-elle son minimum en un point extrémal ? (on pourra considérer la fonction t$\rightarrow t^2$.)
En déduire que l'ensemble des solutions d'un programme linéaire contient un point extrémal.

124. Montrer que le bidual d'un programme linéaire (P) est équivalent au problème (P).

125. Montrer que le dual de

$$(P) \min_{\substack{Ax \ge b \\ x \ge 0}} \langle c, x \rangle$$

est

$$(D) \max_{\substack{{}^{\mathsf{T}}Ay \le c \\ y \ge 0}} \langle b, y \rangle$$

126. Montrer que $(2, 3)$ est la valeur optimale de

$$(D) \min_{\substack{x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \ge 2}} 2x_1 + 3x_2$$

en montrant que la valeur de la fonction objectif pour tout vecteur réalisable est au moins 12

127. Donner un exemple de programme linéaire infaisable, tout autant que son programme dual

128. Résoudre les programmes suivants
    (1) Espace affine : $\min_{Ax=b}\langle c,x\rangle$
    (2) demi-espace : $\min_{\langle a,x\rangle}\langle c,x\rangle$ où $a\neq 0$
    (3) : Rectangle $\min_{l\leq x\leq u}\langle c,x\rangle$
    (4) : simplexe de probabilité $\min_{\langle \mathbf{1},x\rangle=1,x\geq 0}\langle c,x\rangle$
    (5) $\min_{\langle \mathbf{1},x\rangle\geq 1,x\geq 0}\langle c,x\rangle$
    (6) Pavé avec une pondération globale $\min_{\langle \mathbf{1},x\rangle=\alpha,0\leq x\leq 1}\langle c,x\rangle$
    (7) Pavé avec une pondération globale $\min_{\langle d,x\rangle=\alpha,0\leq x\leq 1}\langle c,x\rangle$ avec $d>0$ et $0\alpha\leq\langle \mathbf{1},x\rangle$

129. Montrer que le programme $\min_{Ax\leq b}\langle c,x\rangle$, où A est inversible symétrique, a pour optimum $-\infty$ sauf si $A^{-1}c\leq 0$ auquel cas l'optimum est $\langle c,A^{-1}b\rangle$

130. Exprimer les problèmes d'optimisation suivants comme des programmes linéaires.
    (1) $\min\|Ax-b\|_\infty$
    (2) $\min\|Ax-b\|_1$
    (3) $\min_{\|x\|_\infty\leq 1}\|Ax-b\|_1$
    (4) $\min_{\|Ax-b\|_\infty\leq 1}\|x\|_1$
    (5) $\min\|Ax-b\|_1+\|x\|_\infty$

131. Calculer le dual de

$$\max_{\substack{x_1-x_2\leq 1\\ -x_1+x_2\leq -2\\ x_1,x_2\geq 0}} 2x_1-x_2$$

Quels sont les types de (P) et de son dual ?

132. Soit $U:E\to\mathbb{R}$ une fonction convexe et concave. Montrer que U est linéaire.

133. Soit S^+ (S^{++} resp.) l'espace des matrices positives (définies positives resp.).
    (1) Montrer que $X\in S^+\to\sup\lambda(X)$ est convexe
    (2) Montrer que $X\in S^{++}\to\operatorname{tr}(X^{-1})$ est convexe
    (3) Montrer que $X\in S^{++}\to\det(X^{-1})$ est convexe
    (4) Soit $K\in S^+$. Montrer que $X\in S^{++}\to\det(1+KX^{-1})$ est convexe (strictement convexe si $K\in S^{++}$).
    (5) Soit $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ invariante sous l'action du groupe des permutations des coordonnées et $U:S^+\to\mathbb{R}$ induite via $U(X)=V(\operatorname{spec}(X))$. Montrer que U est convexe si et seulement V l'est.

134. Soit U définie sur S^{++} par $U(X)=\log\det X$. Montrer que

$$dU_X(h)=-\operatorname{tr}(X^{-1}h)$$
$$\operatorname{Hess}U_X(h)=-\operatorname{tr}(X^{-1}X^{-1})$$

135. Soient B,C dans X^{++}. montrer que

$$\langle (B^{-1}+C^{-1})^{-1}x,x\rangle=\inf_{x\in\mathbb{E}}[\langle Bx,x\rangle+\langle C(y-x),y-x\rangle].$$

136. (Ky Fan) La fonction $A\in S^{++}\to(\det A)^{1/n}$ est strictement concave.

137.
- Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, montrer que la boule unité de $L^1(\Omega)$ n'a pas de point extrémal.
- Montrer que la boule unité de l'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues s'annulant à l'infini n'a pas de point extrémal.
- Une matrice A d'ordre n et à coefficients positifs ou nuls est dite bistochastique si $\sum_{i=1}^n a_{ik}=\sum_{j=1}^n a_{\ell j}=1$ pour $k,\ell=1,\dots,n$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ des matrices bistochastiques d'ordre n est convexe, que toute matrice bistochastique avec un coefficient dans $(0,1)$ n'est pas un point extrémal et que les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ sont les matrices de permutation.

exo-16

138. Soit $f_k : \mho \to \overline{\mathbb{R}}$ pour $k = 1, \ldots, d$ et $f : x \in \mathbb{R}^d \to \sum_{k=1}^d f_k(x_k)$. Montrer que $f^*(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k=1}^d f_k(x_k)$.

139. Calculer les transforémes de Fenchel-Nielsen des fonctions suivantes
   (1) $x \in \mathbb{R} \to |x|$
   (2) $x \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^x$
   (3) $x \to ax + x^2$ si $x \geq 0$, 0 sinon
   (4) $\iota_{\mathbb{R}^+} - ln(x)\chi_{\mathbb{R}^+}$
   (5) $|x|^p/p$

140. Montrer que $f \oplus g$ définie par $f \oplus g(x) = \min[f(y) + g(x - y)]$ est convexe si f et g le sont. La fonction $f \oplus g$ est appelée la *convolée infimale* de f et g.

141. Soit C convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$. La fonction f_C définie par $f_C(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \inf_x(x_{n+1} : x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in C)$ est convexe.
Si f, g sont convexes, quelle est la fonction associée à la somme $\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g$?

142. Soient f, g convexes fermées. Montrer que

$$(f \oplus g)^* = f^* + g^*$$
$$(f + g)^* = f^* \oplus g^*$$

143. Soit f, g, h convexes. Montrer que $f \oplus (g \oplus h = (f \oplus g) \oplus h$ et justifier pour $f_1, f_2, \ldots, f_k$

$$f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_k(x) = \inf_{x_1 + \ldots + x_k = x} [f_1(x_1) + \ldots + f_k(x_k)].$$

144. Soit ψ la fonction définie par

$$\psi(x, \gamma) = \sup_{y \in C} [\langle y, x \rangle - \gamma \|y\|^2/2.$$

La fonction ψ est convexe et fermée.
Si C est borné, ψ est finie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.
Si $C = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{dom}\,\psi$ ne contient que des points $x, \gamma)$ avec $\gamma \geq 0$ Si $\gamma = 0$, alors nécessairement $x = 0$ (vu que $\langle y, x \rangle$ est non borné). Enfin, si $\gamma > 0$, alors le minimum est est $y_* = x/gamma$ avec valeur minimum et $|x|^2/(2\gamma^2)$. En résumé, $\mathbf{dom}\,\psi = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^{+*}_\gamma \cup \{0\}$ (domaine ni fermé, ni ouvert) avec $\psi(0) = 0$ et $\psi(x, \gamma) = \|x\|^2/(2\gamma)$ si $\gamma > 0$. Notons $\lim_{\gamma \to 0^+} \psi(\sqrt{\gamma x}, \gamma) = \|x\|_2^2$ et que la fonction psi n'ets pas continue à l'origine.

145. Soit φ une fonction positive définie sur $\overline{B} = \{\|x\| = 1\}$, nulle sur l'intérieur $\{\|x\| < 1\}$. Montrer que φ est convexe.

146.
   (1) Soit C convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $g : (x, t) \in C \times \mathbb{R}^+ \to tf(x/t)$ est convexe (c'est la *transformée convexe* de f).
   (2) Soit $p, q \in (0, 1)$ avec $p + q \leq 1$. Montrer que $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \to x^p y^q$ est concave.
   (3) En déduire que, si $\alpha \in (0, 1/n]$ l'application $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 \ldots x_n)^\alpha$ est concave.